МАТЕМАТИКАЛЫК
АНАЛИЗ

1
БӨЛҮК

Бишкек-2002

Алтай Бөрүбаев, Керим Бараталиев
Бектурган Шабыкеев, Токтогазы Аманкулов,
Токой Камытов

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

1

БӨЛҮМ

Кыргыз Республикасынын билим жана маданият министрлиги тарабынан окуу китеби катарында бекитилген

Экинчи басылышы

Бишкек-2002

ББК 74 262я 73
М-34

Авторлор: А.Бөрүбаев, К.Бараталиев, Б.Шабыкеев,
Т.Аманкулов, Т.Камытов

Физика-математика илиминин доктору, профессор
А.А.Чекеевдин редакциясы боюнча

«Математикалык анализ» 1- бөлүк, жогорку окуу жайлары үчүн китеби. Бул окуу китебине чыныгы сандар, пределдер теориясы, бир аргументтүү жана көп аргументтүү функциялар теориясы жана алардын колдонулуштары, интегралдар теориясы киргизилген. Главалардын аягында көнүгүүлөр үчүн маселелер берилген.

Окуу куралы негизинен бакалавр жана магистр адистерин даярдап чыгарууга арналган.

Рецензенти: Арабаев атындагы педагогикалык университетинин физика-математика факультети.

Шарттуу белгилөөлөр:

○ -далилдөөнүн башталышы

● -далилдөөнүн бүтүшү

△ -чыгарылыштын башталышы

▲ -чыгарылыштын бүтүшү

М $\frac{4306010500-102}{М\ 451\ (11)-2002}$ 87.2002 ББК 74.262я73

ISBN 5-658-01107-8

КИРИШ СӨЗ

Азыркы жогорку окуу жайларынын алдында окутуунун сапатын жогорулатуу жана жогорку билимдүү, квалификациялуу адис-кадрларды даярдоо маселеси турат. Билимдин жана техникалардын ар түрдүү тармактарында кызмат кылган окумуштуулардын жана инженердик адистердин математикалык билиминин фундаменти-*математикалык анализ*. Математикалык анализ азыркы математикалык курстар (алгебра, дифференциалдык геометрия, дифференциалдык теңдемелер, топология, функциалдык анализ) менен өтө тыгыз байланышта жана ал курстардын өзөгүн түзөт.

Илимдин жана техникалардын бардык тармактарында изилдөөнүн математикалык ыкмаларын так үйрөнүп, аларды ар кандай теориялык жана практикалык маселелерди чечүүгө, тагыраак айтканда, математикалык моделдештирүүнү эл чарбасынын түрдүү тармактарына билгичтик менен кеңири колдонуп жатат.

Бул болсо түрдүү кесип алуучу студенттердин математика боюнча теориялык даярдык деңгээлин өрчүтүү жана практикалык маселелерди сапаттуу изилдөө милдетине алып келет.

Сунуш кылынуучу окуу китеби дал ушул милдеттерди чечүүгө жардам бермекчи жана бул окуу китеби, Кыргыз Мамлекеттик Улуттук Университетинин математика жана физика жана ошондой эле информатика жана колдонмо математика факультеттеринде көп жылдан бери окутулуп жаткан тажрыйбаларына негизделип, азыркы колдонулуп жаткан окуу программаларындагы бардык материалдар толук камтылгандай болуп түзүлдү.

Окуу китебинде чыныгы сандар, пределдер теориясы, бир аргументтүү функциянын теориясы жана колдонулуштары, интегралдар теориясы киргизилди. Окуу китебиндеги бардык материалдык окурмандарды математикалык ар түрдүү ыкмаларды мыкты үйрөнүүгө, аларды зарыл болгон учурда жөнөкөйлөтүп эркин колдоно билүүгө көнүктүргүдөй болуп жазылды. Дал ушул максатта, окуу китебине көп мисалдар жана көнүгүүлөр киргизилди. Ал мисалдар жана көнүгүүлөр студенттердин жалпы теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө, математикалык аппаратты ар кандай маселелерди чыгарууда пайдалануу билгичтиктерин өнүктүрүүгө шарт түзөт

Албетте, каралып жаткан бүткүл маселелер боюнча бул окуу китебинде окурмандардын бардыгынын тең таанып билүүчүлүк керектөөлөрүн эң жогорку даражада толук камсыз кылынды деген ойдон биз алыспыз. Биз өзүбүздүн коллегаларыбызга, жогорку окуу жайларынын тиешелүү кафедраларынын окутуучулар коллективине бул колдонмо боюнча өздөрүнүн сын-пикирлерин жана сунуштарын берүүсүн өтүнүп кайрылабыз, анткени аларды биз чын дилибизден кабылдап тескен чыгып колдонмонун экинчи басылышын даярдоого сөзсүз пайдаланмакчыбыз.

АВТОРЛОР

I ГЛАВА

АНЫК САНДАР

§ 1. РАЦИОНАЛДЫК ЖАНА ИРРАЦИОНАЛДЫК САНДАР

Бул главада тааныш болгон чыныгы сандарды жана алардын касиеттерин системалуу жана толук түрдө таанышабыз, анткени чыныгы сандардын теориясы функционалдык көз карандылыгын окуп үйрөнүүдө колдонулат.

1. Рационалдык сандар.

Бүтүн сандардын көптүгүн:

$$\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{1}$$

Z менен белгилеп, алар менен кошуу, кемитүү жана көбөйтүү амалдарын жүргүзсөк кайра эле бүтүн сан аларыбыз орто мектептен бизге белгилүү.

1-аныктама. *Эки бүтүн сандарынын катышы менен (жок дегенде бир ыкма менен), б.а.* $\frac{p}{q}$ *(мында* $p,\ q \in z$ *жана* $q \neq 0$ *) түрүндө берилүүчү сандарды рационалдык сандар дешет жана алардын көптүгү Q менен белгиленет.*

Эки рационалдык $\frac{p_1}{q_1}$ жана $\frac{p_2}{q_2}$ бири бирине барабар болот, эгерде $p_1\, q_2 = q_1\, p_2$ болсо, ал эми $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ болот, эгерде $p_1\, q_2 < q_1 p_2$ болсо. Ошентип эки рационалдык сандарын салыштырууга болот жана алар менен арифметикалык төрт амал кандайча жүргүзүлөөрүн жакшы билебиз.

Эми ар кандай $\frac{p}{q}$ рационалдык саны берилсе, арифметикадан бизге белгилүү болгон эреженин негизинде аны ондук бөлчөккө айландырууга болот:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2, \ldots \tag{2}$$

Бул (2) формуланын оң жагындагы ондук бөлчөктү $\frac{p}{q}$ санынын ондук ажыралышы дешет. Ал ондук ажыралыш чектүү ондук бөлчөк:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 00\ldots, \tag{3}$$

же мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк төмөнкүдөй болору бизге белгилүү,

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_к\ldots = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(\beta_1\ldots\beta_к). \tag{4}$$

Мындагы биринчи учурду ар дайым экинчи учурга төмөнкүчө келтирсе болот:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m - 1)\ 99\ldots\ . \tag{5}$$

Демек, ар кандай $\frac{p}{q}$ рационалдык санына бир гана мезгилдүү чексиз ондук ажыралыш туура келет жана тескерисинче, ар кандай чексиз ондук ажыралышка бир гана рационалдык сан тийиштүү болот. Мисалы нөл саны төмөнкүчө ажырайт: $0 = 0,\ 000\ldots$, ал эми $1 = 1,\ 000\ldots = 0{,}999\ldots$. Рационалдык сандардын касиеттери орто мектептен белгилүү болгондуктан ага токтолбойлук.

2. Иррационалдык сандар.

Геометриялык жана физикалык чоңдуктарды (узундук, аянт, көлөм, температура ж.б.) өлчөөдө рационалдык сандар жетишсиз. Мисалы, катеттеринин узундугу 1 ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын узундугун эсептейлик. Анын узундугу кыскартылбас $\frac{p}{q}$ бөлчөгүнө барабар деп болжолдосок, анда Пифагордун теоремасынын негизинде $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Мындан $p^2 = 2q^2$ болгондуктан, оң жагындагы сан жуп болот жана аны менен бирге сол жагы дагы жуп сан. Ошондуктан $\frac{p}{q}$ бөлчөгү 2 ге кыскарылуучу бөлчөк.

Бул алынган карама-каршы каралган гипотенузанын узундугу рационалдык $\frac{p}{q}$ саны менен туюнтулбасын көрсөтөт жана аны катеттердин узундугу менен ченелбөөчү узундук дешет. Ошентип, мындай узундуктарды өлчөө үчүн иррационалдык сандар деп аталуучу жаңы сандардын түшүнүгүн кийрүү зарыл болот.

Иррационалдык сандарын аныктоонун ар кандай ыкмалары бар (мезгилсиз ондук бөлчөктөр, Дедекинддин кесилиши аркылуу). Биз жогоруда рационалдык сандар мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк менен туюнтулаарын көрдүк.

Бирок, мезгилдүү чексиз ондук бөлчөктөрдөн башка дагы мезгилсиз чексиз ондук бөлчөктөр да кездешет. Мисалы, арифметикадан белгилүү болгон эрежении негизинде 2 санын квадраттык тамырдан чыгарсак, анда мезгилсиз чексиз ондук бөлчөктү $\sqrt{2} = 1{,}41\ \ldots$ алабыз.

2-аныктама. *Ар кандай мезгилсиз чексиз ондук бөлчөк*

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{6}$$

иррационалдык сан деп аталат.

Мында α_0 – бүтүн сан, $\alpha_n (n = 1,2,\ \ldots)$ — оң бүтүн сандар. Иррационалдык сандардын көптүгүн J менен белгилейт.

Ал эми рационалдык жана иррационалдык сандар биригип чыныгы (анык) сандарды түзөт жана алардын көптүгү R менен белгиленет.

Ошентип, ар кандай чыныгы сан (6) түрүндөгү чексиз ондук бөлчөк түрүндө жазылат. Эгерде ал рационалдык сан болсо, анда анын ондук ажыралышы мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк, ал эми иррационалдык сан болсо, анда ондук ажыралыш мезгилсиз чексиз ондук бөлчөк болот.

§2. ЧЕКСИЗ ОНДУК БӨЛЧӨККӨ АЖЫРООЧУ САНДАРДЫ РАЦИОНАЛДЫК САНДАР МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРУУ

1. Чыныгы сандарды салыштыруу.

Эгерде $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2,\ldots$ жана $b=\beta_0,\ \beta_1\beta_2,\ \ldots$ оң чыныгы сандары берилсе, качан гана $\alpha_\kappa=\beta_\kappa,\ \kappa=0,1,2,\ldots$ болсо, анда алар барабар болушат. Ал эми $a<b$ же ошондой эле $b>a$, эгерде $\alpha_0<\beta_0$ болсо, же m индекси табылып $\alpha_\kappa=\beta_\kappa,\ \kappa=0,1,\ \ldots,\ m$ жана $\alpha_{m+1}<\beta_{m+1}$ орун алса. Эгерде $a,b<0$ болушса, анда $a<b$, качан $|a|>|b|$ болсо. Мындагы ар кандай чыныгы a санынын модулу (абсолюттук чоңдугу) төмөнкүчө аныкталат:

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ эгерде } a>0 \text{ болсо,}\\ -a, \text{ эгерде } a<0 \text{ болсо.}\end{cases} \tag{7}$$

Чыныгы сандардын модулунун касиеттерин келтирели:

$$|-a|=|a|,\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|, \tag{8}$$

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,\ |a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{9}$$

Барабарсыздыктар (9)ду далилдейли. Ал үчүн $-|a|<a<|a|$, $-|b|<b<|b|$ барабарсыздыктарын кошсок $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$ болот. Мындан $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ экендиги келип чыгат. Ал эми (9) дагы экинчи барабарсыздыкты төмөнкүчө далилдейбиз:

$a=(a-b)+b,\ b=(b-a)+b$, болгондуктан

$|a|\leqslant|a-b|+b,|b|\leqslant|b-a|+|b|=|a-b|+|b|$ болот.

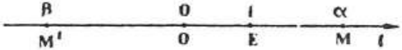
Мындан $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ жана $|a-b|\geqslant|b|-|a|$, б.а.

$$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|.$$

2. Чыныгы сандардын геометриялык сүрөттөлүшү.

Эми T чыныгы сандардын геометриялык сүрөттөлүшүн карайбыз. Ал үчүн l түз сызыгын (1-чийме) алып, андан эсептөөнүн башталышы O чекитин жана чен бирдиги болгон

OE кесиндисин алалы. Анда O чекитине нөл саны жана E чекитине 1 саны туура келет.



1 чийме

Ал эми ар кандай бир $\alpha = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2...$ чыныгы оң санына O чекитинин оң жагынан бир гана M чекити жана $\beta = \beta_0.\beta_1\beta_2...$ чыныгы терс санына O чекитинин сол жагындагы M' чекити туура келет. Тескерисинче l сызыгынын ар бир чекитине ар кандай бир гана чыныгы сан туура келет.

Мындай жол менен алынган l түз сызыгы *сандык ок* деп аталат. Ошентип, чыныгы сандардын R жана сандык ок l чекиттеринин көптүктөрүнүн ортосундагы өз ара бирдей тийиштүүлүк болорун көрдүк.

Көпчүлүк учурларда колдонуучу сандык көптүктөрдү төмөнкүчө белгилешет:

1) кесинди $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$;

2) интервал $(a, b) = \{x : a < x < b\}$;

3) жарым интервалдар $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.

Кесинди $[a, b]$, интервал (a, b), жарым интервалдар $[a, b)$ жана $(a, b]$ чектүү аралыктар болушат. Ошондой эле чексиз аралыктар да кездешет:

1) интервалдар: $(a, +\infty) = \{x : a < x < +\infty\}$ жана $(-\infty, a) = \{x : -\infty < x < a\}$;

2) жарым интервалдар: $[a, +\infty) = \{x : a \leq x\}$, $(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$;

3) $(-\infty, \infty) = \{x : x \in R\}$ чыныгы сандардын көптүгү. Көптүктөр жөнүндөгү түшүнүктөргө кийинчерээк токтолобуз.

3. Чексиз ондук бөлчөк менен туюнтулган санды рационалдык сан менен жакындаштыруу.

Чексиз ондук бөлчөк түрүндө берилген ар кандай $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ чыныгы санын рационалдык сан менен каалагандай тактыкта жакындаштыруу ыкмасына токтололу. Анык үчүн a санын терс эмес дейлик. Эгерде үтүрдөн кийинки n-ондук бөлүгүнөн кийинкилерин алып ташта сак, анда

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

барабарсыздыгын алабыз. Ал эми алынган α санын 10^{-n} рационалдык санына чоңойтсок, анда $\beta = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n} \geqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ санын алабыз.

Ошентип, ар кандай n номери үчүн төмөнкү барабарсыздыктар орун алган α жана β эки рационалдык санды алабыз:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \leqslant \beta = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}.$$

Мында $\beta - \alpha = 10^{-n}$. Демек, рационалдык сандардын касиеттеринин (Архимеддин аксиомасы) негизинде ар кандай $\varepsilon > 0$ эң кичине саны үчүн n номери табылып, андан чоң болгон бардык натуралдык сандар үчүн $10^{-n} < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алат. Биз муну менен төмөнкүдөй лемманы далилдедик.

1-лемма. *Чексиз ондук бөлчөк менен туюнтулуучу ар кандай a жана мурунтадан берилген эң кичине $\varepsilon > 0$ сандары үчүн α жана β рационалдык сандары табылып, төмөнкдөй шарттар орун алат:*

$$\alpha \leqslant a \leqslant \beta \text{ жана } \beta - \alpha < \varepsilon.$$

Эми биз рационалдык сандардын чексиз ондук бөлчөк менен туюнтулуучу ар кандай сандардын арасындагы жайланышуу жыштыгын сүрөттөгөн леммага токтололу.

2-лемма. *Эгерде чексиз ондук бөлчөк менен туюнтулуучу ар кандай эки $a < b$ сандары берилсе, анда жок дегенде с рационалдык саны алардын арасынан $a < c < b$ (демек, чексиз көп рационалдык сандар) табылат.*

○ Аныктык үчүн a жана b оң сандары жана $a = a_0,$ $a_1a_2 \ldots a_n \ldots,$ $b = b_0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$ болсун. Лемманын шарты боюнча $a < b$ болгондуктан, чыныгы сандардын салыштыруу эрежеси боюнча m номери табылып $a_k = b_k, k = 0,1, \ldots, n$ жана $a_{m+1} < b_{m+1}$ болот. Анда, иреттештирүү эрежесин эске алуу менен төмөнкүдөй $c = b_0, b_1b_2 \ldots b_m(b_{m+1} - 1)999 \ldots$ рационалдык саны a жана b сандарынын арасында болорун, б.а. $a < c < b$ экендигин көрүүгө болот. ●

3-лемма. *Эгерде чексиз ондук бөлчөктөр менен туюнтулуучу берилген a жана b сандары үчүн ар кандай $\varepsilon > 0$ саны боюнча төмөнкүдөй шарттарды канааттандырган $\gamma_1 \leq a \leq \gamma_2,$ $\gamma_1 \leq b \leq \gamma_2$ жана $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$ болгон γ_1 жана γ_2 рационалдык сандары табылса, анда a жана b сандары барабар болушат.*

○ Тескерисинче $a \neq b$ деп болжолдойлук. Аныктык үчүн $a < b$ болсун дейлик. Анда 2-лемманын негизинде α_1, α_2 рационалдык сандары табылып $a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$ барабарсыздыгы орун алат. Лемманын шарты жана барабарсыздык белгисинин транзитивдик касиети боюнча $\gamma_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_2.$ Мындан $\alpha_2 - \alpha_1 < \gamma_2 - \gamma_1$. Демек, $\gamma_2 - \gamma_1$ ар кандай эң кичине $\varepsilon > 0$ саны кичине болуучу, лемманын шартына карама-каршы келдик. Ошентип, $a \neq b$ деген болжолдообуз орунсуз экен. ●

§ 3. САНДЫК КӨПТҮКТҮН ЧЕКТЕРИ

1-аныктама. *Чыныгы x сандарынын $X \subset R$ көптүгүнүн бардык x элементтери үчүн $x < M$ барабарсыздыгы орун алгандай M саны табылса, анда X чектелген көптүк деп аталат.*

Эгерде кандай гана эң чоң M санын алсак да, X көптүгүнөн x_0 элементи табылып, $x_0 > M$ барабарсыздыгы орун алса, анда X чектелбеген көптүк болот.

Ал эми M саны (тийиштүү m) табылып, бардык $x \in X$ үчүн $x \leq M$ $(x \geq m)$ барабарсыздыгы орун алса, анда X жогору (төмөн) жагынан чектелген көптүк болот жана M (m) *саны жогорку (төмөнкү) чеги* деп аталат.

Мындан чектелген көптүк жогору жана төмөн жагынан да чектелген көптүк болоору көрүнүп турат.

Мисалы, a жана b чектүү сандар болгондогу $[a, b]$ кесиндисинин жана (a, b) интервалынын чекиттери чектелген көптүк болушат; $[0, +\infty)$ жарым огу төмөн жагынан чектелген, ал эми жогору жагынан чектелбеген көптүктөр. Бардык чыныгы сандардын көптүгү $R = (-\infty, \infty)$ төмөн жагынан да, жогору жагынан да чектелбеген көптүк.

2-аныктама. *Эгерде X көптүгүнүн бардык x элементтери үчүн төмөнкү шарттар:*

1) $x \leq M$ (тийиштүү $x \geq m$), $x \in X$;

2) *Ар кандай эң кичине $\varepsilon > 0$ саны үчүн X көптүгүнөн $x_0 \in X$ саны табылып, $x_0 > M - \varepsilon$ (тийиштүү $x_0 < m + \varepsilon$) барабарсыздыгы орун алса, анда M (тийиштүү m) саны X көптүгүнүн дал жогорку (дал төмөнкү) чеги деп аталат.*

X көптүгүнүн дал жогорку чеги төмөнкүчө белгиленип жазылат: $M = \sup X = \sup\limits_{x \in X} x$, ал эми ал төмөнкү чек: $m = \inf X = \inf\limits_{x \in X} x$.

Теорема. *Эгерде чыныгы сандардын куру эмес X көптүгү жогору жагынан чектелген болсо, анда анын дал жогорку чеги $\sup X$ болот; эгерде чыныгы сандардын куру эмес X көптүгү төмөн жагынан чектелген болсо, анда анын дал төмөнкү чеги $\inf X$ болот.*

○ Дал жогорку чек болорун гана далилдейлик. Шарт боюнча X куру эмес көптүк. Ошондуктан эки учур орун алат:

а) X көптүгүндө жок дегенде бир гана терс эмес элемент бар.

б) X көптүгүнүн бардык элементтери терс болушат.

а) у ч у р у. X көптүгүнүн бардык x элементтери терс эмес болсун. Шарт боюнча X көптүгү жогору жагынан чектелгендиктен (1-аныктаманын негизинде) $M > 0$ саны табылып X көптүгүнүн бардык x элементтери үчүн $x \leq M$ барабарсыздыгы орун алат. Ал эми x сандарын чексиз ондук бөлчөк түрүндө туюнтсак, анда алардын бардык бүтүн бөлүгү

M санынан ашып кетпейт. Алардын эң чоң бүтүн бөлүгүн x_0 менен белгилеп, бүтүн бөлүгү x_0 болгон сандарды гана кароо үчүн калтыралы, ал эми бүтүн бөлүгү x_0 дон кичине болгон сандарды кароодон алып таштайлы. Калтырылган сандардын бүтүн x_0. санын үтүрдөн кийинки биринчи ондук сандарын карап, алардын эң чонун x_1 менен белгилей-ли. Эми X көптүгүндөгү бүтүнү x_0, ал эми биринчи ондук бөлүгү x_1 болгон сандарын калтырып, калгандарын кароодон чыгаралы. Калтырылган сандардын үтүрдөн кийинки экинчи ондук бөлүгүнүн сандарын карап жана алардын эң чонун x_2 менен белгилейли. Ушундай талдоону ирээти менен улантып x санын алабыз:

$$x = x_0.\ x_1 x_2 \dots x_n \dots \tag{10}$$

Эми биз x саны X көптүгүнүн дал жогорку чеги болорун далилдейли. Ал үчүн 2-аныктамадагы 1) жана 2) шарттардын орун аларын көрсөтөлү: 1) $\forall x \in X$ үчүн $x \le \bar{x}$ ирээттүүлүк эрежесинин негизинде жогоруда табылгандыгынан келип чыгат. Айталы, кандайдыр бир $\bar{x} = \bar{x}_0.\ x_1 x_2 \dots x_n \dots \in X$ саны 1) шартын канааттандырбайт дейли, б.а. $x < x$. Демек κ номери табылып $x_0 = x_0$, $x_1 = x_1$, $\dots x_{\kappa-1} = x_\kappa$ жана $x_\kappa > x_\kappa$ болот. Бул эң чоң x_κ ны тандап алдык деген эрежеге карама-каршы келип 1) шарттын орун алышын көрсөтөт. Ал эми X көптүгүндөгү ар кандай терс x элементтер үчүн $x < x$ барабарсыздыгы орун алышы айкын көрүнүп турат.

Эми биз 2) шарттын орун алышы үчүн ар кандай $x' < x$ саны үчүн X көптүгүнөн жок дегенде бир $\tilde{x}$ саны табылып $x' < \tilde{x} < x$ болорун көрсөтүү жетиштүү. Эгерде x' терс сан болсо (жок дегенде бир терс элемент бар дегенбиз), анда X көптүгүнүн ар кандай терс эмес x элементи үчүн $x' < x < x$ барабарсыздыгы дароо орун алат. Ошондуктан $x' = x'_0.\ x'_1 \dots x'_n \dots < x$ болгон санды терс эмес дейлик. Анда ирээттүүлүк эрежесинен m номери табылып

$$x'_0 = x_0,\ x'_1 = x_1,\ x'_2 = x_2,\ \ldots, x'_{m-1} = \bar{x}_{m-1},\ x'_m < \bar{x}_m \qquad (11)$$

шарты орун алат. Экинчиден X көптүгүнөн бүтүн жана үтүрдөн кийинки биринчи m ондук бөлчөктөрү $\bar{x}$ саныныкы менен барабар болгон $\tilde{x} = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_m \ldots$ санын табууга болот, б.а.

$$\tilde{x}_0 = x_0,\ \tilde{x}_1 = x_1,\ \tilde{x}_2 = x_2, \ldots, \tilde{x}_m = \bar{x}_m. \qquad (12)$$

Жогорудагы (11) жана (12) салыштырып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\tilde{x}_0 = x'_0,\ \tilde{x}_1 = x'_0, \ldots, \tilde{x}_{m-1} = x'_{m-1},\ \tilde{x}_m > x'_m.$$

Мындан, ирээттүүлүк эрежесинин негизинде $x' < \tilde{x} < \bar{x}$ экендигине ынанабыз. Ошентип, $\bar{x}$ саны а) учурунда X көптүгүнүн дал жогорку чеги болорун далилдедик.

б) у ч у р у. X көптүгүнүн бардык элементтери терс болгон учурда, анын ар кандай x элементин терс ондук бөлчөк менен туюнтабыз да, эң кичине бүтүн бөлүктөрүн x_0, ал эми эн кичине биринчи ондук бөлүгүн $\bar{x}_1$, экинчисин $\bar{x}_2$ ж.б. менен белгилейбиз. Ушинтип аныкталган оң эмес $\bar{x} = -\bar{x}_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ саны X көптүгүнүн дал жогорку чеги болору мурдагы учурга окшош далилденет. ●

§ 4. ЧЫНЫГЫ САНДАР МЕНЕН БОЛГОН АМАЛДАР

1. Чыныгы сандарды кошуу жана кемитүү.

Рационалдык сандар менен болгон амалдар бизге белгилүү.

1-аныктама. *a жана b чыныгы суммасы деп, төмөнкү барабарсыздыктар:*

$$\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2,\ \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2 \qquad (13)$$

орун алган ар кандай α_1, α_2, β_1, β_2 рационалдык сандары үчүн төмөнкү шарт

$$\alpha_1 + \beta_1 \leqslant c \leqslant \alpha_2 + \beta_2 \qquad (14)$$

аткарылган c чыныгы санын айтабыз жана аны $c = a + b$ символу менен белгилейбиз.

Демек, a жана b чыныгы сандарын кошуу үчүн алардын төмөн жана жогору жагынан жакындашкан (α_1, β_2 жана α_2 β_2) рационалдык сандарынын суммаларын алсак, анда биз издеген $a+b$ суммасы төмөн жана жогору жагынан $\alpha_1+\beta_1$ жана $\alpha_2+\beta_2$ рационалдык сандары менен жакындаштырылат. Бул изделген сумма бар жана жалгыз болорун далилдейли.

1-теорема. *Ар кандай чыныгы a жана b сандарынын суммасы бар жана жалгыз болот.*

○ Жогорудагы (13) шартынын жана барабарсыздык белгисинин транзитивдик касиетинин негизинде $\alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$ болот. Мындан барабарсыздыктын рационалдык сандар үчүн болгон касиетинин негизинде төмөнкүнү алабыз:

$$\alpha_1+\alpha_2 \le \beta_1+\beta_2. \tag{15}$$

Бул алынган (15) барабарсыздыктан, рационалдык сандардан $\{\alpha_1+\alpha_2\}$ түрүндөгү көптүгү жогору жагынан чектелиши жана сандардын дал накта чектери жөнүндөгү теореманын (§ 3) негизинде $\sup\{\alpha_1+\alpha_2\}=c$ болору келип чыгат. Сандардын жогорку жана төмөнкү дал накта чектеринин аныктамасы боюнча $c=\sup\{\alpha_1+\alpha_2\}$ (14) шартты канааттандырат. Демек, $c=\sup\{\alpha_1+\alpha_2\}$ чыныгы a жана b сандарынын суммасы болот.

Эми биз, карама-каршы ыкмасы менен мындан сумма жалгыз болорун далилдейли.

Жогорудагы шарттарды канааттандырган жана

$$\alpha_1+\beta_1 \le c_1 \le \alpha_2+\beta_2,\quad \alpha_1+\beta_1 \le c_2 \le \alpha_2+\beta_2 \tag{16}$$

болгон c_1 жана c_2 суммалары болсун деп болжолдойлу.

Анда ар кандай $\frac{\varepsilon}{2}$ жана берилген a чыныгы саны үчүн α_1, α_2 рационалдык сандары табылып $\alpha_2-\alpha_1<\frac{\varepsilon}{2}$ болот. Ошондой эле $\frac{\varepsilon}{2}$ жана берилген b чыныгы саны үчүн β_1, β_2

рационалдык сандары табылып $\beta_2-\beta_1<\frac{\varepsilon}{2}$ болот. Эгерде $\gamma_1=\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2+\beta_2$ белгилеп жогорудагы (13), (16) шарттарын эске алсак $\gamma_1\leq c_1\leq\gamma_2$, $\gamma_1\leq c_2\leq\gamma_2$ жана $\gamma_2-\gamma_1=$.

$$(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ошентип, c_1, c_2 сандары экөө тең айырмасы ε дон кичине болгон γ_1, γ_2 рационалдык сандары менен төмөн жана жогору жагынан жакындашат. Анда § 2-деги 3-лемманын негизинде $c_1=c_2$ болот. Бул биздин болжолдообузга Солгон карама-каршылык $c=a+b$ суммасынын жалгыздыгын далилдейт. ●

Чыныгы сандарды кемитүү амалы деле рационалдык сандарды кемитүү амалы сыяктуу эле кошуу амалына тескери амалы сыяктуу киргизилет.

2. Чыныгы сандарды көбөйтүү жана бөлүү.

2-аныктама. *a жана b оң сандарынын көбөйтүндүсү деп, төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырган*

$$0<\alpha_1\leq a\leq\alpha_2,\quad 0<\beta_1\leq b\leq\beta_2, \tag{17}$$

ар кандай α_1, α_2, β_1, β_2 рационалдык сандары үчүн төмөнкү шарт

$$\alpha_1\beta_1\leq d\leq\alpha_2\beta_2 \tag{18}$$

орун алган d чыныгы санын айтабыз жана аны $d=a\cdot b$ символу менен белгилеп жазабыз.

Демек, a жана b чыныгы сандарынын көбөйтүндүсү d алардын төмөн жана жогору жагынан жакындашып төмөнкү шарттарды канааттандырышкан $0<\alpha_1\leq a$, $0<\beta_1\leq b$ жана $a\leq\alpha_2$, $b\leq\beta_2$ рационалдык сандарынын мүмкүн болгон бардык көбөйтүндүлөрүнүн $\{\alpha_1\beta_1\}$ дал жогорку чегине же $\{\alpha_2\beta_2\}$ көбөйтүндүлөрүнүн дал төмөнкү чегине барабар болорун көрөбүз.

2-теорема. *Ар кандай чыныгы a жана b оң сандарынын көбөйтүндүсү бар жана жалгыз болот.*

○ Бул теореманы чыныгы сандардын суммасы жөнүндөгү 1-теорема сыяктуу эле далилдейбиз. Жогорудагы (18) шартын канааттандырган α саны үчүн (17) шартын канааттандыруучу бардык α_1, β_1 рационалдык сандарынын көбөйтүндүлөрүнүн жогорку дал чегин $\sup\{\alpha_2\beta_2\}$ же ошондой эле мүмкүн болгон α_2, β_2 сандарынын көбөйтүндүсүнүн төмөнкү дал чегин $\inf\{\alpha_2\beta_2\} = d$ алабыз. Эми мындай көбөйтүндүнүн жалгыздыгын далилдейли. Жогорудагы (17), (18) шарттарын канааттандырган d_1 жана d_2 сандары болот деп болжолдойлу:

$$0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2 \leqslant M, \; 0 \leqslant \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2 \leqslant M$$

жана

$$\alpha_1\beta_1 \leqslant d_1 \leqslant \alpha_2\beta_2, \; \alpha_1\beta_1 \leqslant d_2 \leqslant \alpha_2\beta_2. \tag{19}$$

Анда § 2деги 1-лемманын негизинде берилген a жана b чыныгы сандары үчүн айырмалары $\alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\varepsilon}{2M}$ жана $\beta_2 - \beta_1 < \frac{\varepsilon}{2M}$ болгон α_1, α_2 жана β_1, β_2 рационалдык сандары табылат. Жогорудагы (19) шарты боюнча d_1, d_2 сандары $\alpha_1\beta_1$ жана $\alpha_2\beta_2$ рационалдык сандарынын арасында жатышат жана алардын айырмасы

$$\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1 = \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha_1) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \text{ болот.}$$

Ошондуктан § 2деги 3-лемманын негизинде $d_1 = d_2$. Теорема далилденди. ●

Ар кандай a, b чыныгы сандардын көбөйтүндүсү үчүн төмөнкү эреже орун алат:

1) Эгерде $a = 0$ болсо, анда ар кандай $b \in \mathbb{R}$ үчүн $a \cdot b = 0$.

2) Эгерде $a < 0$, $b < 0$ болсо, анда $ab = |a| \cdot |b|$ болот.

3) Эгерде $a > b$, $b < 0$ же $a < 0$, $b > 0$ болсо, анда $ab = -|a| \cdot |b|$.

Эми $a \neq 0$, b ар кандай чыныгы сандар болсун, анда $ax = b$ теңдемеси жалгыз гана $x = \frac{b}{a}$ чечимине ээ болот жана аны b санын a санына бөлгөндөгү тийинди деп аташат.

§ 5. КӨПТҮКТӨР ЖӨНҮНДӨГҮ НЕГИЗГИ ТҮШҮНҮКТӨР

1. Көптүктөр менен болгон амалдар.

Математикада көптүктү жаратылыштагы ар кандай объектилердин жыйындысы катарында карашат.

Мисалы: (a, b) интервалынын чекиттери; китепканадагы китептер; аудиториядагы студенттер ж.б.

Көптүктөрдү $A, B, \ldots$ же $X, Y, \ldots$ башкы басма тамгалары менен жана анын элементтерин $a, b, \ldots$ же $x, y, \ldots$ кичине тамгалары менен белгилешет. Ал эми a чоңдугу A көптүгүнүн элементи болот дегенди $a \in A$ деп жана b чоңдугу A көптүгүнүн элементи дегенди $b \notin A$ деп жазышат.

1-аныктама. *Эгерде A көптүгүнүн ар бир элементи B көптүгүнүн элементи болсо, анда A, B нын камтылган көптүгү деп аталып, $A \subset B$ же $B \supset A$ белгиси менен жазылат.*

Мисалы, $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset \mathbb{R}$ жана $J \subset \mathbb{R}$.

2-аныктама. *A же B көптүктөрүндө жаткан гана элементтерден турган C көптүгүн A жана B көптүктөрүнүн суммасы (бириктирүүсү) дешип $C = A \cup B$ белгиси менен белгиленет. Ал эми A да жана B да да жаткан гана элементтерден турган D көптүгү A жана B көптүктөрүнүн көбөйтүндүсү (кесилиши) деп аталып, $D = A \cap B$ белгиси менен белгиленет.*

Мисалы, $J \cup Q = \mathbb{R}$ жана $J \cap Q = \varnothing$,

Мында $\varnothing$ — куру көптүк, б.а. бир дагы элементи жок.

Ошондой эле E көптүгү, B көптүгүндө жатпаган A көптүгүнүн элементтеринен турса, анда аны A жана B көптүктөрүнүн айырмасы дешип $E = A/B$ менен белгилешет. Мисалы: 1) $\mathbb{R}/Q = J$ 2) $\mathbb{R}/J = Q$. Жогоруда Q — рационалдык сандар, J — иррационалдык сандар, $\mathbb{R}$ — чыныгы сандардын көптүгү.

Эгерде X көптүгү, ал эми P кандайдыр бир касиет болсо, анда $\{x \in X : p(x)\}$ же $\{x \in X / p(x)\}$ жазуулары X көптүгүнүн P касиетине ээ болгон элементтеринен турган көптүктү билгизет. Мисалы, $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 9 = 0\}$ көптүгү $x^2 - 9 = 0$ теңдемесинин натуралдык сан болгон чечимин билгизет, б.а. $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 9 = 0\} = \{3\}$.

2. Саналуучу жана саналбоочу көптүктөр.

3-аныктама. *Эгерде X жана Y көптүкторүнүн элементтеринин өз ара бир маанилүү тийиштүүлүгү болсо, б.а.:*

1) X көптүгүнүн ар бир x элементине Y көптүгүнүн бир гана y элементи туура келсе;

2) Y көптүгүнүн ар бир y элементине X көптүгүнүн ар кандай x элементи туура келет;

3) X көптүгүнүн ар кандай x элементине Y көптүгүнүн ар кандай y элементи туура келсе, анда X жана Y көптүктөрү эквиваленттүү болушат жана аны $X \sim Y$ белгиси менен белгилешет.

4-аныктама. *Натуралдык сандарды $\mathbb{N}$ көптүгүнө эквиваленттүү болгон X көптүгүн саналуучу көптүк деп аташат. Саналуучу көптүктүн элементтерин натуралдык сандар менен номерлөөгө болот, б.а. $x_n \in X$, $n \in N$ болсо, анда X көптүгүнүн элементтери $\{x_n\}$ удаалаштыгын түзөт.*

3-теорема. *Рационалдык сандардын Q көптүгү саналуучу көптүк болот.*

○ Ар кандай r рационалдык саны кыскартылбоочу $\frac{p}{q}$ $(q > 0,\ p,\ q \in \mathbb{N})$ бөлчөгү менен туюнтулары белгилүү. Эгерде $h = |p| + q$ санын $\frac{p}{q}$ рационалдык санынын бийиктиги деп атасак, анда бирдей бийиктикке ээ болгон рационалдык сандар чектүү гана санда болот. Бийиктиги $h = 1$ болгон сан $0 = \frac{0}{1}$ бирөө, ага 1 номерин берели. Ал эми $h = 2$ болгон сан $1 = \frac{1}{1}$ жана $-1 = \frac{-1}{1}$ экөө, ага 2 жана 3 номерин берели.

Андан кийин бийиктиги $h=3$ болгон сандарды номерлейли ж.у.с. Ошентип, биз рационалдык жана натуралдык сандардын коптугүнүн өз ара бир маанилүү тийиштүүлүгүн түздүк, б.а. $Q \sim N$. Демек, Q саналуучу коптук. ○

5-аныктама. *Натуралдык сандардын N коптугүнө эквиваленттүү болбогон чексиз элементтүү көптүктөр саналбоочу коптук деп аталат.*

4-теорема. *Чыныгы сандардын R көптүгү саналбоочу коптук болот.*

○ Оң чыныгы сандардын R_+ көптүгү саналбоочу болорун далилдейлик. Тескерисинче саналуучу болот деп болжолдойлук. Анда R_+ коптүгүнүн бардык элементтери $\{\alpha_n\} = \{\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)} \alpha_2^{(n)} ...\}$, $n \in N$ удаалаштыгын түзөт. Биз эми $\{\alpha_n\}$ удаалаштыгында жатпаган $\beta = 0, \beta_1\beta_2...$ чыныгы саны болорун көрсөтөлү. Ал үчүн β_1 санын $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}$, $\beta_1 \neq 9$, $\beta \neq 0$ ж.у.с. Жалпысынан ар кандай $N \in n$ үчүн $\beta_n \neq \alpha_n^{(n)}$, $\beta_n \neq 9$, $\beta_n \neq 0$ болгондой β санын тандап алабыз. Анда ар кандай $n \in N$ үчүн $\beta \neq \alpha_n$ болот. Бул алынган жыйынтык бардык $\beta \in R_+$ чыныгы саны $\{\alpha_n\}$ удаалаштыгында жатарына карама-каршы келип, R_+ көптүгүнүн саналбоочусун корсотот. Ошону менен бирге чыныгы сандардын R коптүгү саналбоочу көптүк. ○

§ 6. ЧЫНЫГЫ САНДАРДЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТТЕРИ

Чыныгы сандар төмөндөгү I–V касиеттерине ээ. Булардын I–IV касиеттери рационалдык сандар үчүн да орун алат, ошондуктан далилдөөсүз (аксиома катарында) эле келтирели. Ал эми V касиетти бир нече түрдө келтирип, анын бирөөнү § 3 тө далилдедик.

I. Ирээттүүлүк касиеттери.

1) Ар кандай эки a жана b сандары "<", ">" же "=" белгилеринин бирөө менен гана байланышат, б.а. $a < b$, же $a > b$, же $a = b$.

2) Эгерде $a < b$ жана $b < c$ болсо, анда $a < c$ ("$<$" белгисинин транзитивдик касиети).

3) Эгерде $a < b$ болсо, анда $a < c < b$ болгон c саны табылат.

II. Кошуу жана кемитүү амалдарынын касиеттери.

1) $a+b=b+a$ (орун алмаштыруу же коммутативдик касиети);

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (топтоштуруу же ассоциативдик касиети);

3) $a+0$, демек ар кандай a саны үчүн 0 саны табылат;

4) $a+(-a)=0$, ар кандай a саны үчүн карама-каршы $-a$ саны табылат;

5) ар кандай c саны үчүн $a<b$ дан $a+c<b+c$ келип чыгат.

III. Көбөйтүү жана бөлүү амалдарынын касиеттери.

1) $a \cdot b=b \cdot a$ (орун алмаштыруу же коммутативдик касиети);

2) $ab(c)=a\ (b \cdot c)$ (топтоштуруу же ассоциативдик касиети);

3) $a \cdot 1 \cdot a$, демек ар кандай a саны үчүн 1 саны табылат;

4) $a \cdot \frac{1}{a}=1$, ар кандай $a \neq 0$ саны үчүн ага тескери болгон $a^{-1}=\frac{1}{a}$ саны табылат;

5) $(a+b)c=ac+bc$ (бөлүштүрүүчүлүк же дистрибутивдик касиети);

6) $a<b$, $c>0$ болсо, анда $a \cdot c<b \cdot c$.

IV. Архимед касиети.

Ар кандай a саны үчүн андан чоң болгон $n>a$ натуралдык n саны табылат.

Бул Архимеддин жана жогорудагы III, 6) касиеттеринен ар кандай $\varepsilon>0$ саны үчүн $\frac{1}{n}<\varepsilon$ болгон натуралдык n

саны табылары келип чыгат. Ошондой эле ар кандай $a \geqslant 0$ саны үчүн бир гана n саны табылып, $n \leqslant a \leqslant n+1$ барабарсыздыгы орун алат.

V. Чыныгы сандардын үзгүлтүксүздүк касиети.

Эгерде бири бирине камтылган кесиндилердин удаалаштыгы:

$$\sigma_{n+1} \subset \sigma_n, \; \sigma_n = \left[a_n, b_n\right] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}, \; n = 1, 2,..$$

жана алардын узундуктары нөлгө умтулса

$$n \to \infty \text{ да } d_n = b_n - a_n \to 0,$$

анда бардык σ_n кесиндилеринде жаткан бир гана c чекити (саны) табылат.

Бул V касиетти камтылган кесиндилер жөнүндөгү лемма дешет. Чыныгы сандардын үзгүлтүксүз касиетин төмөнкүчө да берүүгө болот.

V'. Эгерде бардык чыныгы сандардын $\mathbb{R}$ көптүгүн өз ара кесилишпеген куру эмес A жана B көптүктөрүнө ажыратсак $\mathbb{R} = A \bigcup B$ жана ар кандай $a \in A$ ар кандай $b \in B$ дан кичине болсо, анда же A көптүгүндө эң чоң c саны табылат, бул учурда B көптүгүндө эң кичине сан жок, же B көптүгүндө эң кичине c саны табылат, бул учурда A көптүгүндө эң чоң сан жок. Мындай $\mathbb{R} = A \bigcup B$ ажыратууну $\mathbb{R}$ көптүгүндөгү кесилиш деп аташат.

Үзгүлтүксүздүк касиеттин дагы бир түрүн § 3тө теорема аркылуу берилген.

V''. Ар кандай жогору (төмөн) жагынан M саны менен чектелген куру эмес чыныгы сандардын көптүгү жогорку (төмөнкү) дал $c \leqslant M$ $(c \geqslant M)$ чегине ээ болот.

Бул келтирилген V, V', V'' касиеттер өз ара эквиваленттүү, б.а. $V \to V' \to V'' \to V$ далилдөөсү келип чыгат.

(Никольский С.М., Курс математического анализа. т.1, гл.1., кара.)

II ГЛАВА

УДААЛАШТЫКТЫН ПРЕДЕЛИ

§ 1. САН УДААЛАШТЫГЫ ЖАНА АНЫН ПРЕДЕЛИ

1. Сандык удаалаштыктар.

Берилген E көптүгүнүн ар бир элементин F көптүгүнүн кайсы бир элементине өзгөртүп түзүүчү эрежени (законду) E ни F ке чагылдыруу деп атайбыз. Бул фактыны $f:E \to F$ же $f:x \to f(x)$ аркылуу белгилешет. Мында $f(x)=y$ элементин x элементинин *образы* (сүрөтү), ал эми x элементин y тин *оригиналы* (прообразы) дешет.

Бул главада $E = \mathbb{N}$ учурду карайбыз, б.а. $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}^1$,- муну функция дейбиз. Функциянын маанилерин, б.а. $f(n), n \in \mathbb{N}$, сандарын y_n аркылуу белгилейбиз. Бул учурда f тин ар бир мааниси үчүн анын кийинки мааниси болгон $y_{n+1} = f(n+1)$ саны дайыма табылат да, мындай функцияны сандык удаалаштык деп атап жана $\{y_n\}$ аркылуу белгилейбиз. Кашаанын ичин удаалаштыктын мүчөсүнүн катар номери n же анын n-мүчөсү деп атоо кабыл алынган.

Удаалаштыктын аныкталуу областы — $\mathbb{N}$ дайыма чексиз мүчөлөрдөн, ал эми анын маанилеринин көптүгү — $\{y_n\}$ чексиз да, чектүү да боло аларын белгилей кетели.

1-м и с а л. Удаалаштык айтылыш жолу менен берилиши мүмкүн.

Мисалы,

y_1 — бүгүнкү күндүн саат 12си;

y_2 — эртеңки (экинчи) күндүн саат 12си;

y_3 — бүрсүгүнкү (үчүнчү) күндүн саат 12си;
д.у.с.

Мында $n=1$ — биринчи күн; $n=2$ — экинчи күн; д.у.с.

Бул жерде бизди кызыктырган негизги нерсеге көңүлүбүздү буралы. Берилген удаалаштык $\{y_n\}$, биринчиден чексиз көптүктү түзөт; экинчиден ал төмөндөгүдөй суроолорго жооп бере алабы; бул удаалаштык качандыр бир убакта бүтөбү (токтойбу), эгер бүтсө анын бүтүмү жөнүндө эмне айта алабыз, б.а. бул удаалаштыктын предели барбы?

2-мисал. Удаалаштык формула аркылуу бериле алат. Мисалы,

$$n \to f(n) = (-1)^n \cdot n,$$

б.а.
$$\{y_n\} = \{(-1)^n \cdot n\}.$$

Бул удаалаштыкка деле жогорку суроону коё алабыз.

Бул суроого жооп берүү — каралып жаткан главанын негизги максаты.

3-мисал. $n \to f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$,

б.а.
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Мында аргумент n дин мааниси канчалык чоң болгон сайын ага туура келген удаалаштыктын мааниси $y_n = \frac{1}{n}$ ошончолук кичине боло берет, аягында, б.а. n чексизге умтулганда y_n дин мааниси нөлгө айланат.

Жогоруда каралган мисалдарда берилген удаалаштыктар чексиз элементтерден (мүчөлөрдөн) түзүлгөн. Удаалаштыктар чектүү элементтерден да түзүлүшү мүмкүн.

4-мисал. $n \to f(n) = (-1)^n$, $n \in \boldsymbol{N}$,

б.а.
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} = \{-1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}.$$

Мында удаалаштык 1 жана −1 деген эки элементтен түзүлгөн, бирок анын предели жок (эмне үчүн?).

5-м и с а л. $n \to f(n) = a,\ a \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$,

б.а.
$$\{y_1,\ y_2,\ldots\} = \{a,\ a,\ldots\}.$$

Мында удаалаштык бир гана элементтен (сандан) түзүлгөн, бирок ал чексиз орунду ээлейт.

2. Пределдин аныктамалары.

Эми биз предел жөнүндөгү түшүнүктү тактап алалы. Бул жерде айта кете турган сөз, математикалык анализ жалпы математика илиминин негизги бир тармагы катары анын башка тармактарынан айырмасы бар, ал айырмачылык — анын берилишинин өзгөчөлүгүндө. Математикалык анализдин тилин билбей туруп, ал предметти окуп үйрөнүүгө болбой тургандыгы белгилүү иш. Ал тил так ушул жерден башталат. Эмесе көңүл буралы.

Аныктама. *Эгерде кандай гана чоңдуктагы оң санды албайлы (аны эң кичине—нөлгө жакын алуу максатка ылайык), ал санды $\varepsilon > 0$ ("эпсилон") деп белгилеп алалы, анын чоңдугуна жараша $\{y_n\}$ удаалаштыгынын мүчөлөрүнүн (элементтеринин) ичинен бир мүчө табылса, аны y_N аркылуу белгилеп алалы, жана өзгөрүлмө номер n табылган номер N деп чоң болгон учурдун бардыгында $|y_n - A| < \varepsilon$ (б.а. $A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$) барабарсыздыгы аткарылса, анда $A \in \mathbb{R}^1$ саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат.*

A саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели дегенди

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \tag{1}$$

аркылуу жазабыз (мында lim Латындын limes — "предел" деген сөзүнүн кыскача жазылышы). Кээде n чексизге умтулганда (кыскача $n \to \infty$) $y_n \to A$ санына умтулат деп да жазышат.

A саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели болсо, анда бул удаалаштык өз предели A га жыйналат же y_n A га умтулат деп да айтышат.

Эгерде каралып жаткан удаалаштык пределге ээ болбосо, анда аны таралуучу деп аташат.

Жогоруда келтирилген пределдин аныктамасын логикалык символикалардын жардамы аркылуу кыскача жазып көрөлү.

Эгерде
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):$$
$$N < n \Rightarrow \left|y_n - A\right| < \varepsilon$$
болсо, анда $A = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Башкача айтканда, эгерде $n > N$ болгон учурда $|y_n - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун ала тургандай мурунтан алынган $\varepsilon > 0$ саны үчүн ага жараша $N = N(\varepsilon)$ номери табылса, анда A саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат: $y_n \to A, n \to \infty$.

Эми жогоруда каралган мисалдардагы удаалаштыктардын пределдери бар же жок экендигин текшерип көрүү кыйын эмес. Атап айтсак, 2-мисалдагы удаалаштык пределге ээ эмес, себеби, $\varepsilon = 1$ деп алсак ар кандай A саны үчүн $|A - (-1)^n \cdot n\ | < \varepsilon$ боло албайт.

3-мисалдагы удаалаштык пределге ээ. Себеби – ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $N = N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ деп алсак болот, мында $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - \frac{1}{\varepsilon}$ санынын бүтүн бөлүгү. Демек,
$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] < n \Rightarrow \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$
экенин алабыз, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Мында $A = 0$.

Ошондой эле 4-мисалдагы удаалаштык пределге ээ эмес, ал эми 5-мисалдагы -– пределге ээ жана анын предели a га барабар экендигин алабыз. Деги эле бардык $n \in \mathbb{N}$ үчүн $y_n = A$

болсо (мындай удаалаштыкты стационардык удаалаштык деп да айтышат), анда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

6-мисал. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ удаалаштыгынын пределин табуу талап кылынсын. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ экендигин далилдейли. $y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ болгондуктан $|y_n - 1| = \dfrac{1}{n}$ деп жаза алабыз. Каалаган $\varepsilon > 0$ санын алалы. Эгерде $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ болсо, анда $|y_n - 1| < \varepsilon$, б.а. $\dfrac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow |y_n - 1| < \varepsilon$. Ошондуктан номер $N = N(\varepsilon)$ үчүн $\dfrac{1}{n} < N$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык сандарды ала алабыз, мисалы, $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ деп алсак болот. Бул учурда

$$N(\varepsilon) < n \Rightarrow |y_n - 1| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Аныктама боюнча $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ экендигин алабыз.

7-мисал. $y_n = q^n$, $|q| < 1$ удаалаштыгынын пределин тапкыла, $q \neq 0$ учурду карайлы (эгерде $q = 0$ болсо, анда $y_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, ошондуктан $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Жаңы $r = \dfrac{1}{q}$ санын алалы, мында $|q| < 1$ болгондуктан, $r > 1$, б.а. $r = 1 + \alpha$ (мында $\alpha > 0$). Ошондуктан Бернуллинин барабарсыздыгы боюнча

$$\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n > n \cdot \alpha \qquad (2)$$

экенин алабыз. Демек, $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\alpha\varepsilon}\right]+1$ деп алсак, анда

$$N(\varepsilon)<n\Rightarrow|q|^n<\frac{1}{n\alpha}$$

деп жаза алабыз, б.а. $\dfrac{1}{n\alpha}\leqslant\dfrac{1}{N(\varepsilon)\alpha}<\varepsilon$. Мунун өзү пределдин аныктамасы боюнча $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ экечин айтып турат.

8-м и с а л. $y_n=\sum\limits_{\kappa=0}^{n}q^{\kappa}(|q|<1)$, удаалаштыгынын пределин тапкыла. Геометриялык прогрессиянын суммасынын формуласы боюнча $y_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}-\dfrac{q^n}{1-q}$ эске алып, (2) формуланын негизинде $\left|y_n-\dfrac{1}{1-q}\right|=\dfrac{q^n}{1-q}<\dfrac{1}{1-q}\cdot\dfrac{1}{n\alpha}$ деп жаза алабыз. Демек, $N(\varepsilon)=1+\left[\dfrac{1}{(1-q)\,\alpha\varepsilon}\right]$ деп алсак, мында $\alpha=\dfrac{1}{|q|}-1$, анда бардык $n\geqslant N(\varepsilon)$ үчүн $\dfrac{1}{(1-q)\,n\alpha}<\varepsilon$ болорун билебиз, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{1-q}$.

Удаалаштыктын пределинин аныктамасына дагы кайрылалы:

$$\left(\lim_{n\to\infty}y_n=A\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\\ N<n\Rightarrow|y_n-A|<\varepsilon.\end{cases}$$

Муну дагы мындайча жазса да болот:

$$\left(\lim_{n\to\infty}y_n=A\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\\ N<n\Rightarrow A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon.\end{cases}$$

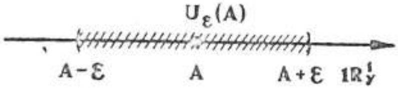
башкача а‵тканда, каалагандай $\varepsilon > 0$ санын албайлы, ага жараша номер $N = N(\varepsilon)$ табылып, ошол номерлүү удаалаштыктын мүчөсүнөн кийинки анын бардык мүчөлөрү үчүн ($n > N(\varepsilon)$ үчүн) каралып жаткан удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ интервалынын ичинде жатышат.

Бул интервал A чекитинин "ε – *аймагы*" деп аталат жана аны $U_\varepsilon(A)$ аркылуу белгилешет (2-чийме), б.а.

$$U_\varepsilon(A) = \left\{y \in \mathbb{R}^1 : A - \varepsilon < y < A + \varepsilon\right\} = \left\{y : \left|y - A\right| < \varepsilon\right\}.$$

Ошентип төмөнкүдөй аныктаманы алабыз:

Аныктама. *Эгерде A чекиттин каалаган ε – аймагы үчүн*



2-чийме

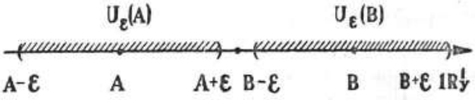
$\{y_n\}$ ден N номерлүү мүчөсү табылып жана андан кийинки анын бардык мүчөлөрү $U_\varepsilon(A)$ аймагынын ичинде калып, демек, бул аймактын сыртында каралып жаткан удаалаштыктын саналуу гана мүчөлөрү калып калышы мүмкүн болсо, анда A саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат:

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N(\varepsilon) < n \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(A). \end{cases}$$

3. Удаалаштыктын пределинин жалгыздыгы.

1-теорема. *Сандык удаалаштыктын бирден ашык предели болбойт.*

○ Бизге $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^1$ сан удаалаштыгы берилсин жана анын бирден ашык пределдери болсун дейли. Ал пределдердин ичинен каалаган экөөнү карайлы: A жана B, мында $A \neq B$ (эгерде $A = B$ учурда, бул каалаган эки предел болгондуктан теореманын далилденишине келебиз), анын ичинде $A < B$ болсун ($B < A$) учур каралып жаткан учурга окшош.



3-чийме

$\varepsilon > 0$ санын A жана B чекиттеринин ε – аймактары кесилишпегендей кылып тандап алалы (3-чийме), мисалы, $\varepsilon = (B - A)/2$ болсун, A саны $\{y_n\}$ удаалаштыгынын предели болгондуктан алынган $\varepsilon > 0$ боюнча ага жараша $N(\varepsilon)$ номери табылып, бардык $n > N(\varepsilon)$ үчүн $y_n \in U_\varepsilon(A)$ болоорун алабыз. Ошондуктан $U_\varepsilon(A)$ интервалынын сыртында удаалаштыктын саналуу (чектүү) гана мүчөлөрү калышы мүмкүн. Айрым алганда, $U_\varepsilon(B)$ интервалында каралып жаткан $\{y_n\}$ удаалаштыгынын саналуу (чектүү) гана, (чексиз эмес) мүчөлөрү камтылыш мүмкүнчүлүгүнө келебиз. Мунун өзү B — предел дегенге каршы келет (предел болгондон кийин аныктама боюнча анын ар кандай аймагы, анын ичинде $U_\varepsilon(B)$ аймагы да, удаалаштыктын чексиз мүчөлөрүн камтыган болууга тийиш эле). Бул карама-каршылык теореманын далилдөөсүнө алып келет, себеби алынган карама-каршылык теореманы далилдөө кабыл алган божолдообуздун туура эместигин далилдейт. Демек, сандык удаалаштык бирден ашык пределге ээ боло албайт. ●

Бул теоремадан биз эгерде берилген удаалаштыктын предели бар болсо анда ал удаалаштык үчүн жалгыз гана предели экенин алабыз. Бирок каралган удаалаштык чектүү пределге ээ болбосо да теорема туура.

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде $\{y_n\}$ удаалаштыгы A санына жыйналса, анда $\{y_{n+1}\}$ удаалаштыгы да ошол эле санга жыйналарын көрсөткүлө.

2. Эгерде $\{y_n\}$ удаалаштыгы A санына жыйналса, анда $\{y_{n+p}\}$ $(p \in \mathbf{N})$ удаалаштыгы да ошол эле санга жыйналарын далилдегиле.

3. Берилген удаалаштыктын чектүү сандагы элементтерин алып таштоодон же ага чектүү сандагы жаңы мүчөлөрдү кошуп жазуудан анын жыйналышы же жыйналбашы өзгөрүлбөй тургандыгын далилдегиле.

4. $\{(-1)^n \cdot A\}$ удаалашытыгы жыйналбай тургандыгын далилдегиле.

5. Жыйналуучу удаалаштык чектелген көптүк катары.

Жогоруда ар кандай сан удаалаштыгы — кайсы бир функциянын маанилеринин көптүгү, б.а. $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^1$, деп аныктадык. Азыр биз, эгерде удаалаштык жыйналса (б.а. пределге ээ болсо), анда ал чектелген көптүк болоорун далилдейбиз.

Биринчиден чектелген көптүктөрдүн аныктамасы сан удаалаштыктары үчүн кандай өзгөчөлүктөр менен такталарына токтололу.

Аныктамалар.

1. Эгерде берилген $\{y_n\} \subset \mathbf{R}^1$ сан удаалаштыгынын бардык мүчөлөрү үчүн $c_1 \leqslant y_n$ барабарсыздыгын канааттандыра турган c_1 турактуу саны бар болсо, анда бул удаалаштыкты сол (төмөнкү) жагынан чектелген удаалаштык деп айтышат, б.а. эгерде

$$\exists c_1 \in R^1 : c_1 \leqslant y_n \ \forall n \in \mathbf{N}$$

болсо, анда $\{y_n\}$ сол жагынан чектелген удаалаштык.

Мисалы, $\{y_n\} = \{n^2\}$ удаалаштыгы сол жагынан чектелген:

$$1 \leqslant n^2 \ \forall n \in \mathbf{N}\cdot$$

2. Ошондой эле, эгерде

$$\exists c_2 \in \mathbf{R}^1 : y_n \leqslant c_2 \ \forall n \in \mathbf{N}$$

болсо, анда $\{y_n\}$ удаалаштыгын оң (жогорку) жагынан чектелген удаалаштык деп айтышат. Мисалы, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ удаалаштыгы оң жагынан чектелген: $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant 1$.

3. Эгерде $\{y_n\}$ удаалаштыгы сол жагынан да, оң жагынан да чектелген болсо, б.а.

$$\exists c_1,\ \exists c_2 : c_1 \leqslant y_n \leqslant c_2 \ \forall n \in \boldsymbol{N},$$

анда аны чектелген удаалаштык деп айтышат.

Акыркы аныктама төмөндөгүдөй аныктамага тең күчтө:

4. Эгерде

$$\exists c > 0 : |y_n| \leqslant c \ \forall n \in \boldsymbol{N}$$

болсо, анда $\{y_n\}$ чектелген удаалаштык деп аталат. Чынында эле, эгерде $c_1 = -c$, $c_2 = c$ деп алсак, анда 3-аныктамадан 4-аныктама келип чыгарын көрөбүз. Ошондой эле, эгерде $c = max\,(|c_1|, |c_2|)$ деп алсак, анда 4-аныктамадан 3-аныктама келип чыгарын көрөбүз. Демек, 3-жана 4-аныктамалар эквиваленттүү.

Эми биз 4-аныктаманын дагы бир формасына көңүл бөлөлү.

5. Эгерде $\{y_n\} \in \boldsymbol{R}^1$ удаалаштыгы 0 чекитинин c аймагында (б.а. $U_c(0)$ көптүгүндө) камтылган болсо, анда аны чектелген деп аташат.

2-теорема. *Ар кандай жыйналуучу удаалаштык чектелген удаалаштык болот.*

○ Биз жыйналуучу удаалаштыкты алалы: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. Пределдин аныктамасы боюнча $\varepsilon = 1$ деп алалы жана ага жараша табылган $N(\varepsilon)$ номери боюнча $N(\varepsilon) < n \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon$ экендигин алабыз. $|y_n| = |y_n - A + A| \leqslant |y_n - A| + |A|$ барабарсыздыгын пайдаланып ($n > N(\varepsilon)$ учурдун бардыгында) $|y_n| \leqslant 1 + |A|$

болоорун көрөбүз. Эгерде эми $c = max\ (1 + |A|, |y_1|, \dots, |y_{N-1}|)$ деп белгилесек, анда $|y_n| \geqslant c\ \forall n > N(\varepsilon)$, б.а. $\{y_n\}$ удаалаштыгы чектелген экенине келебиз. ○

1-э с к е р т ү ү. 2-теорема көрсөткөндөй, эгерде удаалаштык пределге ээ болсо, анда ал чектелген көптүктү түзөт, бирок бардык эле чектелген удаалаштык пределге ээ боло бербейт. Мисалы $((-1)^n)$ удаалаштык чектелген көптүк: $|(-1)^n| \leqslant 1\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, бирок анын предели жок, б.а. бул удаалаштык жыйналуучу эмес.

2-э с к е р т ү ү. Биз жогоруда чектелген удаалаштыктын аныктамасын келтирдик. Ушуга байланыштуу чектелбеген удаалаштыктардын аныктамасы да чоң мааниге ээ.

Аныктама. *Эгерде*

$$\forall c > 0\ \exists N = N(c):$$
$$N(c) < n \Rightarrow c < y_n$$

болсо, анда $\{y_n\}$ *—чектелбеген удаалаштык деп аталат.*

9-м и с а л. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}$ — чектелген удаалаштык экенин далилдейли. Бир жагынан бул удаалаштык сол жагынан чектелген:

$$n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{3^n}{n!}.$$

Экинчиден, ал оң жагынан да чектелген,

$$n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \frac{3^n}{n!} \leqslant 3,$$

себеби $3 < n \Rightarrow y_n = \dfrac{3}{n} y_{n-1} < y_{n-1}$, б.а. бул анык кемүүчү удаалаштык.

10-м и с а л. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{0{,}5^n}{n!}\right\}$ чектелбеген удаалаштык.

Албетте, бул удаалаштык сол жагынан чектелген:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{0.5^n}{n!}.$$

Бирок, оң жагынан чектелбеген удаалаштык, себеби ал анык өсүүчү удаалаштык:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{0.5}{n+1} y_n > y_n.$$

6. Жыйналуучу удаалаштыктардын барабардыгы жана барабарсыздыгы.

Албетте, эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ болсо, анда $\{t_1, t_2, \ldots\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots\}$ удаалаштыгы үчүн да $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = A$ болорун далилдөө кыйынга турбайт. Чынында эле аныктама боюнча

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \\ N(\varepsilon) < n \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon \end{cases}$$

деп жаза алабыз. Ошондуктан төмөндөгүнү да алабыз:

$$\left(\lim_{n\to\infty} t_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \\ N(\varepsilon) + 1 < n \Rightarrow |t_n - A| < \varepsilon. \end{cases}$$

Бирок биздин негизги далилдей турганыбыз мына бул.

3-теорема. *Эгерде бизге* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *удаалаштыктары берилип жана*

$$n \geqslant N_0 \Rightarrow x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$$

болсо, анда $\{y_n\}$ удаалаштыгы да ошол эле пределге жыйналат: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

O Пределдин аныктамасы боюнча:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \\ N_1(\varepsilon) < n \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(A) \end{cases}$$

жана

$$\left(\lim_{n\to\infty} z_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ошол эле } \varepsilon > 0 \text{ үчүн } \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \\ N_2(\varepsilon) < n \Rightarrow z_n \in U_\varepsilon(A). \end{cases}$$

Демек, (3) формуланын негизинде муну алабыз,

$$N < n \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(A),$$

мында $N = max\ (N_1, N_2)$, *б.а.*

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow y_n \in U_\varepsilon(A) \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = A. \ \bigcirc$$

Эскертүү. Бул теореманы үч удаалаштык жөнүндөгү теорема деп (айрым адабиятта үч милиционерлер жөнүндөгү теорема деп да) айтышат.

11-мисал. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ экендигин далилдейли. Бул максатта $\{y_n\} = \{\sqrt[n]{n} - 1\}$ удаалаштыгы сол жагынан чектелгендигин көрөбүз: $0 \leqslant y_n,\ n \in \mathbb{N}$. Андан кийин биномдун теоремасына таянып

$$n = (1 + y_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\ y_n^2$$

барабарсыздыгын алабыз. Ал эми мындан

$$y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}},\ n \geqslant 2$$

барабарсыздыгына келебиз. Демек,

$$N_0 = 2 < n \Rightarrow 0 \leqslant y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$$

деп жаза алабыз. Эми 3-теорема боюнча

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$$

экенине келебиз. Бул далилденүүчүнүн өзү.

12-мисал. Эгерде $a > 0$ болсо, анда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ болоорун далилдейли. $y_n = \sqrt[n]{a} - 1$ деп белгилеп алсак, анда

3*

$a > 1$ учурда $0 < y_n$ болоорун көрөбүз жана биномдун теоремасына ылайык

$$1 + ny_n \leqslant (1 + y_n)^n = a$$

барабарсыздыгын алабыз, мындан улам

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < y_n \leqslant \frac{a-1}{n},$$

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$$

деп жаза алабыз, демек, теорема боюнча $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, б.а. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ экенин алабыз. $0 < a < 1$ учурда алдынкы формуланын ордуна

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1-a}{n} \leqslant y_n < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-a}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

экенин алабыз жана бул да далилденүүчүнүн өзү.

4-теорема. *Эгерде* $\lim_{n\to\infty} y_n = A$, $\lim_{n\to\infty} z_n = B$ *жана* $A < B$ *болсо, анда бул* A *жана* B *сандарына жараша* $N \in \mathbb{N}$ *номери табылат да,*

$$N < n \Rightarrow y_n < z_n$$

туюнтма аткарылат.

○ A жана B сандары менен $A < C < B$ түрүндө байланышкан C санын алалы. Аныктама боюнча

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n - A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = C - A \text{ үчүн } \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \\ N_1 < n \Rightarrow \left|y_n - A\right| < C - A; \end{cases}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} z_n - B\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = B - C \text{ үчүн } \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \\ N_2 < n \Rightarrow \left|z_n - A\right| < B - C; \end{cases}$$

Ошондуктан $max\ (N_1, N_2) = N < n \Rightarrow y_n < A + (C - A) = C = B - (B - C) < z_n$. ●

Натыйжалар. Эгерде $\lim_{n\to\infty} y_n = A$, $\lim_{n\to\infty} z_n = B$ жана кайсы бир $N \in \mathbb{N}$ номеринен баштап:

а) $N < n \Rightarrow y_n > z_n$ болсо, анда $A \geq B$;

б) $N < n \Rightarrow y_n \geq z_n$ болсо, анда $A \geq B$;

в) $N < n \Rightarrow y_n > B$ болсо, анда $A \geq B$;

г) $N < n \Rightarrow y_n \geq B$ болсо, анда $A \geq B$

барабарсыздыктары аткарылат.

а) учурдун далилдөөсүн келтирели (калгандары ага окшош).

$N < n \Rightarrow y_n > z_n$ болсун да, $A \geq B$ барабарсыздыгы болсун дейли, анда $A < B$. Бирок,

$$\left(A = \lim_{n\to\infty} y_n\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = B - A \ \text{үчүн} \ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |y_n - A| < B - A, \end{cases}$$

б.а. $N < n \Rightarrow y_n < A + (B - A) = B$, бул болсо берилген шартка каршы келет, себеби 4-теорема боюнча кайсы бир номерден кийин (аны кайтадан N деп белгилеп алсак болот) $y_n < z_n$ барабарсыздыгын алышыбыз керек.

Пределдеги анык барабарсыздык барабардыкка өтүп кетиши мүмкүн. Мисалы, $N \ni n \Rightarrow y_n = \frac{1}{n} > 0$, бирок $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Дагы бир мисал: $n \in N \Rightarrow y_n = 1 + \frac{1}{n}$; $z_n = 1 - \frac{1}{n}$; $y_n > z_n$, бирок $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 1$.

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде $y_n \to A$, $z_n \to B$ болсо, анда:

1) $y_n + z_n \to A + B$; 2) $y_n z_n \to AB$; 3) эгерде $B \neq 0$, $0 \in \{z_n\}$ болсо, анда $(y_n/z_n) \to A/B$ болорун далилдегиле.

2. Эгерде $\{y_n\}$ жана $\{z_n\}$ удаалаштыктары жыйналбоочу экени белгилүү болсо, анда алардын суммасы, кобой-

түндүсү жана тийиндиси жөнүндө эмнелерди айтууга болот?

3. Эгерде $n \in N \Rightarrow y_n \leq z_n$ болсо жана $\{y_n\}$ жана $\{z_n\}$ удаалаштыктары жыйналуучу болушса, анда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ экенин далилдегиле.

4. Эгерде $y_n \to A$ жана $A > 0$ болсо, анда бул удаалаштыктын саналуу гана мүчөлөрүнөн башкалары оң сан болушарын далилдегиле.

§ 2. ЧЕКСИЗ КИЧИНЕ ЖАНА ЧЕКСИЗ ЧОҢ УДААЛАШТЫКТАР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

1. Чексиз кичине удаалаштыктар.

Бизге $\{\alpha_n\} \subset R^1 = (-\infty, \infty)$ сан удаалаштыгы берилсин дейли. Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ болсо, аны чексиз кичине удаалаштык (ч.к.у.) деп айтышат, б.а.

$$\{\alpha_n\} \text{—ч.к.у.} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon. \end{cases}$$

Чексиз кичине удаалаштыктар жыйналуучу удаалаштыктар менен тыгыз байланышта болуп, алардын касиеттерин изилдөөдө чоң ролду ойнойт.

$\{y_n\}$ жыйналуучу удаалаштыгын алалы жана анын пределин A болсун дейли: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. $n \in N \Rightarrow \alpha_n = y_n - A$ аркылуу чексиз кичине $\{\alpha_n\}$ удаалаштыгын алабыз:

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon. \end{cases}$$

Тескерисинче да, эгерде $y_n = A + \alpha_n$, $n \in N$ деп алсак, анда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, себеби $\{\alpha_n\}$ чексиз кичине удаалаштык.

Ошентип ар кандай жыйналуучу удаалаштык $\{y_n\}$ үчүн

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (y_n - A) = 0\right).$$

б.а. ар кандай жыйналуучу удаалаштык үчүн

$$n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow y_n = A + \alpha_n \tag{5}$$

формуласын жазууга болот.

Мисалы, а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, десек $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ — ч.к.у.

б) $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$, десек, $\{\alpha_n\}$ —ч.к.у. (11-мисалды кара).

Чексиз кичине удаалаштыктардын касиеттерин келтирүүдөн мурун алардын суммасы, айырмасы, көбөйтүндүсү жана алардын бөлчөгү жөнүндөгү түшүнүктү тактап алалы. Аталган арифметикалык амалдар каралып жаткан удаалаштыктардын бирдей номерлүү мүчөлөрү менен гана жүргүзүлөрүн белгилейбиз, мисалы:

$$\{x_n + y_n\};\quad \{x_n - y_n\};$$
$$\{x_n \cdot y_n\};\quad \{x_n / y_n\},\ y \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Эми касиеттерине өтөлү.

а) эки чексиз кичине удаалаштыктардын алгебралык суммасы чексиз кичине удаалаштык болот.

○ $\{\alpha_n\}$ жана $\{\beta_n\}$ — чексиз кичине удаалаштыктар болсо, анда

$$\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon); \\ N_1 < n \Rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{cases}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ошол эле } \varepsilon > 0 \text{ үчүн } \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \\ N_2 < n \Rightarrow |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Эгерде $N = max\ (N_1,\ N_2)$ деп алсак, анда

б.а. $$N < n \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0\right). \bullet$$

1-натыйжа. Үч, төрт, ж.у.с. сандагы чексиз кичине удаалаштыктардын алгебралык суммасы чексиз кичине удаалаштык болот.

○ Үч кошулуучуну карайлы:

$$\{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\} = \{(\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n\},$$

бул а) касиети боюнча ч.к.у. болот. Кийинкилерин да ушул эле жол менен далилдөөгө болот. ●

б) Эгерде $\{x_n\}$ – чектелген, ал эми $\{\alpha_n\}$ — чексиз кичине удаалаштыктар болсо, анда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ — чексиз кичине удаалаштык болот.

○ Чектелген удаалаштыктын аныктамасы боюнча

$$\exists M > 0: |x_n| \leq M\ \forall n \geq N,$$

ошондой эле чексиз кичине удаалаштыктын аныктамасы боюнча

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):$$

$$N < n \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Мындан

$$N < n \Rightarrow |x_n \cdot \alpha_n| = |x_n|\ |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

экендигин алабыз. $\varepsilon > 0$ саны эркибизче кичине болгондуктан натыйжа далилденди. ●

2-натыйжа. Турактуу сан менен чексиз кичине удаа-

…аштыктын көбөйтүндүсү чексиз кичине удаалаштык бо-
лот;

в) эки чексиз кичине удаалаштыктардын көбөйтүндүсү чексиз кичине удаалаштык болот.

○ Эгерде $\{\alpha_n\}$ жана $\{\beta_n\}$ – ч.к.у. болсо, анда

$$\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \\ N_1 < n \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon; \end{cases}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0\right) \Leftarrow \begin{cases} \varepsilon = 1 \ \text{үчүн} \ \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \\ N_2 < n \Rightarrow |\beta_n| < 1; \end{cases}$$

Демек, $max\,(N_1, N_2) = N < n$ үчүн

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n|\,|\beta_n| < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

б.а. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ — чексиз удаалаштык. ○

3-натыйжа. Үч, төрт ж.у.с. сандагы чексиз кичине удаалаштыктардын көбөйтүндүсү чексиз кичине болот. (Далилдегиле!)

Э с к е р т ү ү. Эки чексиз кичине удаалаштыктын бөлчөгү ар түрдүү удаалаштыкты бериши мүмкүн. Мисалы, эгерде $\alpha_n = \frac{\lambda}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ болсо, анда $\{\alpha_n/\beta_n\} = \{1,1,\dots\}$ — стационардык удаалаштыкты алабыз. Ал эми $\alpha_n = 1/n^2, \beta_n = 1/n$ болсо, анда $\{\alpha_n/\beta_n\} = \{1/n\}$ чексиз кичине удаалаштыкты алабыз; эгерде $\{\beta_n\}$ удаалаштыгындагы айрым мүчөлөр нөлгө барабар болсо, анда $\{\alpha_n/\beta_n\}$ удаалаштыгы эч кандай мааниге ээ эмес, эгерде $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ болсо анда $\{\alpha_n/\beta_n\} = \{n\}$ — чексиз чоң удаалаштыкка айланат. Биз жаңы түшүнүккө келдик, ага токтоло кетели.

Аныктама. *Берилген* $\{y_n\}$ *удаалаштыгын чексиз чоң деп төмөнкү учурда айтабыз:*

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = \infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow |y_n| > \varepsilon. \end{cases}$$

Айрым алганда, анын ачык түрлөрү булар:

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow y_n < -\varepsilon; \end{cases}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N < n \Rightarrow y_n > \varepsilon. \end{cases}$$

Мисалы, эгерде $y_n = (-1)^n \cdot n$ болсо, анда $\lim_{n\to 0} y_n \neq \pm\infty$. Эгерде $y_n = n^3/n^2 + 1$ болсо, анда $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$; эгерде $y_n = -\sqrt{n}$ болсо, анда $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Албетте, эгерде $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ жана $\{x_n\}$ чексиз чоң удаалаштыкты түзсө, анда $\{1/x_n\}$ удаалаштыгы чексиз кичине удаалаштык болот. Чынында эле ушундай: ар кандай $\varepsilon > 0$ кичине санын албайлы, $1/\varepsilon$ үчүн ага жараша $N = N(\varepsilon)$ номери табылып жана $n > N$ үчүн $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ барабарсыздыгы аткарыларын алабыз, б.а.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):$$
$$N < n \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon.$$

Демек, аныктама боюнча $\{1/x_n\}$ — чексиз кичине удаалаштык.

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде $\{\alpha_n\}$ — чексиз кичине удаалаштык болсо (мында $\forall n \in \mathbf{N}\ \alpha_n \neq 0$), анда $\{1/\alpha_n\}$ — чексиз чоң удаалаштык экенин көрсөткүлө.

2. Эгерде $\{y_n\}$ удаалаштыгында $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ болсо, анда ал чексиз чоң удаалаштык боло алабы?

3. Чексиз чоң удаалаштыктар чектелген удаалаштыктар боло алышабы?

4. Эгерде $\{x_n\}$ — чектелген, ал эми $\{y_n\}$ — чексиз чоң удаалаштыктар болсо, анда $\{x_n + y_n\}$ — чексиз чоң удаалаштык болорун далилдегиле.

5. Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ болсо, анда $\{x_n \cdot y_n\}$ жана $\{x_n + y_n\}$ удаалаштыктары жөнүндө эмнелерди айтууга болот?

2. Жыйналуучу удаалаштыктар менен болгон амалдар.

5-теорема. *Эгерде* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *болсо, анда:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n \cdot y_n\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n / y_n\right) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, (мында $y_n \neq 0$, $n \in N$; $b \neq 0$).

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ экендигинен (5) формула боюнча $\forall n \in N$ $x_n = a + \alpha_n$ деп жаза алабыз. Ошондой эле $y_n = b + \beta_n$, мында $\{\alpha_n\}$ жана $\{\beta_n\}$ удаалаштыктары чексиз кичине удаалаштыктар.

а) Эгерде $z_n = x_n + y_n$, $C = a + b$, $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ белгилөөлөрүн киргизсек, анда $z_n = C + \gamma_n$ деген барабардыкка келебиз, мында $\{\gamma_n\}$ – чексиз кичине удаалаштык (1-п. а) ны карагыла).

Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n + y_n\right) = C = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

б) $z_n = x_n \cdot y_n$, $C = a \cdot b$, $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$

белгилөөлөрүн пайдаланып, $z_n = C + \gamma_n$ деген формуланы жаза алабыз, мында $\{\gamma_n\}$ — чексиз кичине удаалаштык (1-п. б) ны карагыла). Ошондуктан

$$\lim_{n\to\infty} z_n = C = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$$

в) $Z_n = \frac{x_n}{y_n}$, $C = \frac{a}{b}$, $\gamma_n = \frac{(a+\alpha_n)\,b - (b+\beta_n)a}{by_n}$

деген белгилөөнүн жардамы менен $z_n = C + \gamma_n$, б.а.- $z_n - C = \gamma_n$ барабардыгын алабыз. Эгерде $\{\gamma_n\}$ — чексиз удаалаштык болоорун далилдесек, анда

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = C = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

барабардыгына келмекпиз жана теорема толугу менен далилденмек.

Эми биз $\{\gamma_n\}$ удаалаштыгына токтолоду. Аны $\gamma_n = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\cdot\frac{1}{y_n}$ түрүндө жазып алалы.

Барабардыктын оң жагындагы кашаанын ичи чексиз кичине удаалаштыктын мүчөлөрү (1-п. в) жана а) ны карагыла) экенин көрүү кыйынчылыкка турбайт. Эгерде 1-п. в) боюнча $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — чектелген удаалаштык экенине ынансак, анда талап кылынган далилденмек.

Лемма. *Эгерде $y_n \neq 0$ $\forall n \in N$ жана $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$ болсо, анда $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — чектелген удаалаштык.*

○ $b \neq 0$ болгондуктан $|b| > 0$. Удаалаштыктын пределинин аныктамасы боюнча алынган $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ саны үчүн ага жараша $N = N(\varepsilon)$ номери табылып, мындай деп жаза алабыз:

$$N < n \Rightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2},$$

б.а.

$$N < n \Rightarrow \frac{|b|}{2} > |y_n - b| \geq |b| - |y_n|.$$

Мындан $\frac{|b|}{2} < |y_n|$, $n \in \mathbb{N}$ экенин алабыз, демек,

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|},\ N < n. \bigcirc$$

1-натыйжа. Кошулуучуларынын саны $m < \infty$ болгон удаалаштыктардын алгебралык суммасынын предели, эгерде алардын ар бири пределге ээ болсо, алардын пределдеринин суммасына барабар:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{x_n + y_n + \ldots + z_n}_{m}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n + \ldots + \lim_{n\to\infty} z_n.$$

2-натыйжа. Эгерде c — $const$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсо, анда $\lim\left(c \cdot x_n\right) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3-натыйжа. Көбөйтүүчүлөрүнүн саны $m < \infty$ болгон удаалаштыктардын көбөйтүндүсүнүн предели, эгерде алардын ар бири пределге ээ болсо, алардын пределдеринин көбөйтүндүсүнө барабар:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n \cdot \ldots \cdot z_n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\cdots\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right).$$

13-м и с а л. Эгерде $P_\kappa(x) = a_0 x^\kappa + a_1 x^{\kappa-1} + \ldots + a_{\kappa-1} x + a_\kappa$, $Q_\kappa(x) = b_0 x^\kappa + b_1 x^{\kappa-1} + \ldots + b_{\kappa-1} x + b_\kappa$ болсо, анда тапкыла:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_\kappa(x)}{Q_\kappa(x)}$ (мында $a_0 \neq$, $b_0 \neq 0$).

Δ Болчоктун алымын да, бөлүмүн да n^κ бөлүп,

$$\frac{P_\kappa(x)}{Q_\kappa(x)} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{\kappa-1}}{n^{\kappa-1}} + \frac{a_\kappa}{n^\kappa}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_{\kappa-1}}{n^{\kappa-1}} + \frac{b_\kappa}{n^\kappa}}$$

барабардыгын алабыз. Мындан 5-теореманын а) п. жана 2-натыйжа боюнча

$$\lim_{n\to\infty} P_\kappa(n) = \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_\kappa}{n^\kappa}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_0 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{n}\right) + \ldots + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_\kappa}{n^\kappa}\right) = a_0.$$

ошондой эле, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_\kappa(n) = b_0$ экендигин алабыз. Ошол эле теореманын в) п. боюнча

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_\kappa(n)}{Q_\kappa(n)} = \frac{a_0}{b_0}$$

экенин табабыз. Δ

Контрольные суроолор.

1. Жыйналбоочу эки удаалаштыктардын суммасы жыйналуучу болушу мүмкүнбү?
2. Жыйналбоочу эки удаалаштыктардын көбөйтүндүсү жыйналуучу болушу мүмкүнбү?
3. Жыйналбоочу эки удаалаштыктардын бөлчөгү жыйналуучу болушу мүмкүнбү?
4. Жыйналуучу жана жыйналбоочу эки удаалаштыктардын суммасы, көбөйтүндүсү жана бөлчөгү жыйналуучу болушу мүмкүнбү?

§ 3. УДААЛАШТЫКТАРДЫН ПРЕДЕЛДЕРИНИН ЖАШАШЫ

1. Удаалаштыктын монотондуулугу, көптүктүн анык учтары.

$\{x_n\}$ удаалаштыгынын бардык мүчөлөрү үчүн, б.а. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$ барабарсыздыгы аткарылса, анда аны *өсүүчү удаалаштык* деп, ал эми $\forall n \in N$ үчүн $x_n \geq x_{n+1}$ барабарсыздыгы аткарылса, анда аны *кемүүчү удаалаштык* деп аташат. Эгер бул барабарсыздыктар $x_n < x_{n+1}(x_n > x_{n+1})$ түрүндө аткарылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгын анык өсүүчү (кемүүчү) удаалаштык деп аташат.

Мындай удаалаштыктардын бардыгын монотондуу (анык монотондуу) удаалаштыктар деп аташат.

Эгерде $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$ барабарсыздыгы $n \geq n_0$ үчүн аткарылса, анда $\{x_n\}$ удаалаштыгын n_0 номеринен баштап өсүүчү (кемүүчү) удаалаштык деп аташат. n_0 номеринен баштап анык өсүүчү (анык кемүүчү) удаалаштыктар да ушуга окшош аныкталышат.

Көнүгүүлөр.

1. $\{x_n\}$ — өсүүчү удаалаштык болсун дейли. Бул удаалаштыктар монотондуу боло алышабы: $\{-x_n\}, \{1/x_n\}, \{x_n^2\}, \{(-1)^n x_n\}$?

2. Эгерде $\{x_n\}$ — монотондуу удаалаштык болсо, анда $\{ax_n + b\}$ удаалаштыгы да монотондуу болорун далилдегиле.

Эми көптүктүн анык учтары жөнүндөгү түшүнүккө кайрылалы (I главаны карагыла).

Эгерде $\{x_n\}$ үчүн төмөндөгү эки шарт аткарылса:

1) удаалаштыктын бардык мүчөлөрү a санынан чоң болбосо, б.а.

$$\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow x_n \leq a;$$

2) ар кандай $\varepsilon > 0$ үчүн $a - \varepsilon$ санынан чоң болгон удаалаштыктын мүчөсү бар болсо, б.а.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): x_N > a - \varepsilon ,$$

анда a санын $\{x_n\}$ удаалаштыгынын анык жогорку учу деп айтабыз жана бул фактыны

$$a = sup\ \{x_n\}$$

аркылуу белгилейбиз.

$\{x_n\}$ удаалаштыгынын анык төмөнкү учу да ошондой эле аныкталып, аны

$$b = inf\ \{x_n\}$$

аркылуу белгилейбиз (жогоруда айтылгандай эле ал үчүн да эки шарт аткарылышы керек:

$$1)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b \leqslant x_n;$$

$$2)\ \forall \varepsilon < 0 \exists N = \mathbb{N}(\varepsilon)$$

$$x_N < b - \varepsilon)$$

$\{x_n\}$ удаалаштыгынын жогорку жана төмөнкү учтары: $a = sup\ \{x_n\}$ жана $b = inf\ \{x_n\}$, бул удаалаштыктын мүчөлөрү болушу да, болбошу да мүмкүн.

Көнүгүүлөр.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \{n\}, \{(-1)^n\}$ удаалаштыктарынын анык жогорку жана анык төмөнкү учтарын тапкыла. Кайсынысы бул удаалаштыктын мүчөсү боло алат жана кайсынысы боло албайт?

2. Монотондуу удаалаштыктын жыйналуусунун белгиси.

6-теорема. *Эгерде өсүүчү удаалаштык $\{x_n\}$ жогору жагынан чектелген болсо, анда ал пределге ээ жана $sup\ \{x_n\}$ ге барабар:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = sup\ \{x_n\}.$$

Эгерде кемүүчү удаалаштык $\{x_n\}$ төмөн жагынан чектелген болсо, анда ал пределге ээ жана ал төмөнкүгө барабар:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf\ \{x_n\}.$$

○ Теореманын биринчи бөлүмүнүн далилдөөсүн келтирели (экинчиси ага окшош). $\{x_n\}$ көптүгү жогору жагынан чектелгендиктен, анын анык жогорку учу бар жана ал 1-п.та келтирилген эки шарт боюнча аныкталат. Берилген удаалаштыктын өсүүчү касиетин пайдаланып, муну жаза алабыз:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):$$

$$N < n \Rightarrow a-\varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant a,$$

б.а.

$$N < n \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Мунун өзү, пределдин аныктамасына ылайык,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup \{x_n\}$$

экенин айтып турат. ●

1-э с к е р т ү ү. Бул теореманы кыскачараак төмөндөгүчө айтууга болот:

6′-теорема. *Ар кандай чектелген монотондуу удаалаштык пределге ээ болот.*

2-э с к е р т ү ү. Бул теорема монотонду эмес удаалаштыктар үчүн да төмөндөгү формада өз күчүндө кала алат: ар кандай чектелген жана n_0 номеринен баштап монотондуу болгон удаалаштык пределге ээ.

Көнүгүүлөр.

1. Монотондуу удаалаштыктын жыйналышынын зарыл жана жетиштүү шарты болуп анын чектелгендиги эсептелерин далилдегиле.

2. $\{x_n\}$ жана $\{y_n\}$ — өсүүчү удаалаштыктар болсун. Эгерде $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leqslant y_n$ болсо, анда

а) $\{y_n\}$ удаалаштыгынын жыйналышынан $\{x_n\}$ удаалаштыгынын жыйналышы келип чыгат;

б) $\{x_n\}$ удаалаштыгы жыйналбоочу болсо, андан $\{y_n\}$ удаалаштыгы да жыйналбай тургандыгы келип чыгарын далилдегиле.

3. e–саны.

$\{x_n\}$ удаалаштыгынын ар бир мүчөсү

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

түрүндө берилсин дейли. Бул өсүүчү удаалаштык жана ал жогору жагынан чектелген экенин далилдейбиз.

○ Ньютондун биномунун формуласы боюнча муну мындайча жазса болот:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots=$$

$$=1+\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right). \quad (6)$$

Демек, кийинки мүчөсүн да ушул түрдө жазалы:

$$x_{n+1}=1+\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n+1}\right). \quad (7)$$

(6) жана (7) суммаларда бардык кошулуучулар оң санды түзүп турат, анын үстүнө (6) сумманын ар бир кошулуучусу өзүнө туура келүүчү (7) суммадагы кошулуучудан кичине, себеби $1-\frac{m}{n}<1-\frac{m}{n+1}$, $m=1,\ 2,\ldots,\ n-1$, ал эми (6) суммадагы кошулуучулардын саны (7) суммадагы кошулуучулардын санынан бирөөнө кем. Ошондуктан $x_n<x_{n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

Демек, $\{x_n\}$ – анык өсүүчү удаалаштык. Эми бул удаалаштыктын жогор жагынан чектелгендигин далилдөө үчүн $0<1-\frac{m}{n}<1$ $(m=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ жана $\kappa\in\mathbf{N}\Rightarrow\frac{1}{\kappa!}\leqslant\frac{1}{2^{\kappa-1}}$ барабарсыздыктарды пайдаланып, геометриялык прогрессиянын суммасы жөнүндөгү формуланын негизинде (6) формуладан муну алабыз:

$$x_n < 1+\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{2^{\kappa-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Демек, $\{x_n\}$ — жогору жагынан чектелген удаалаштык. Андыктан 6-теорема боюнча $\{x_n\}$ удаалаштыгынын переdели бар, аны e тамгасы аркылуу белгилеп алалы.

Ошентип,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{8}$$

Негизи e саны болгон x тин логарифмасы x тин натуралдык логарифмасы деп аталат жана аны $\ln x$ деп белгилешет. e саны иррационалдык сан экени далилденген жана анын биринчи маанилери булар:

$$e = 2{,}718281828459045... \bullet$$

14-м и с а л. $\{x_n\}$ удаалаштыгынын ар бир мүчөсү $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$, формуласы аркылуу туюнтулсун, анын пределин карап көрөлү.

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = x_n\cdot\frac{a}{n+1}$$

болгондуктан, $n_0 = [a]$ номеринен баштап $\frac{a}{n+1} < 1$, б.а. $x_{n+1} < x_n$, демек n_0 номеринен баштап берилген удаалаштык анык кемүүчү удаалаштыкты түзөт. Ошону менен эле бирге ал төмөн жагынан да чектелген: $0 < x_n$, $n \in N$. Ошондуктан 6-теорема боюнча анын предели бар: $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Эми b санын табууга да болот:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n\cdot\frac{a}{n+1}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}\right) = b\cdot 0 = 0.$$

Мындан $b = 0$, себеби $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Көнүгүүлөр.

1. Удаалаштыктын ар бир мүчөсү $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ аркылуу берилсин. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ болорун далилдегиле.

2. $x_n = n/\sqrt[n]{n}$ болсо, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ экенин далилдегиле.

3. $x_n = 1/\sqrt[n]{n!}$ болсо, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ экенин далилдегиле.

Улам камтылган аралыктар жөнүндөгү Кантордун теоремасы.

Бизге аралыктардын $\{\Delta_n\}$ удаалаштыгы берилсин дейли, мында $\Delta_n = [a_n, b_n]$. Эгерде төмөнкү эки шарт аткарылса:

1) ар бир кийинки аралык мурункусуна камтылган болсо:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Delta_{n+1} \subset \Delta_n;$$

2) Δ_n аралыктын узундугу $n \to \infty$ учурда нөлгө умтулса, б.а.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0, \tag{9}$$

анда бул удаалаштыкты улам камтылган аралыктардын удаалаштыгы деп айтабыз.

Биринчи шарттын өзүн дагы мындайча жазсак болот:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1. \tag{10}$$

7-теорема (Кантор). *Эгер удаалаштык $\{\Delta_n\}$ улам камтылган аралыктардын удаалаштыгы болсо, анда бул удаалаштыктын бардык мүчөлөрүндө камтылган жалгыз чекит c жашайт.*

○ Теоремада айтылган эки фактыны далилдөө керек, биринчиси — c чекиттин жашашы, экинчи — анын жалгыздыгы.

а) *жашашы.* (10) формуладан көрүнүп тургандай, $\{a_n\}$ — өсүүчү удаалаштык, ал эми $\{b_n\}$ кемүүчү удаалаштык. Ошондой эле $\{a_n\}$ жогору жагынан чектелген, мисалы, анын жогорку чеги болуп $\{b_n\}$ удаалаштыгынын каалаган мүчөсү кызмат кыла алат: $a_n \leq b_m$, $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$. Демек, 6-теорема боюнча

$$\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\} = c.$$

Ушундай эле жол менен

$$\lim_{n\to\infty} b_n = inf\{b_n\} = c_1$$

экенин алабыз. 4-теореманын натыйжаларына ылайык

$$\forall n \in N \Rightarrow a_n \leq c,\ c_1 \leq b_n,$$

б.а. $\{\Delta_n\}$ удаалаштыгынын бардык мүчөлөрүндө камтылган чекиттин жашашы далилденди.

б) *жалгыздыгы.* Биз $c = c_1$ экендигин далилдесек жетиштүү болот. $c \neq c_1$ болсун деп эсептесек, анда же $c < c_1$, же $c_1 < c$. $c < c_1$ учурун алалы. Анда $a_n \leq c < c_1 \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Мындан $b_n - a_n \geq c_1 - c = \alpha > 0$, ал эми мындай болушу мүмкүн эместиги (9) формуладан көрүнүп турат. Демек,

$$c_1 = c = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}. \ \bullet$$

§ 4. КАМТЫЛГАН УДААЛАШТЫКТАР ЖАНА АЛАРДЫН ПРЕДЕЛДЕРИ

1. Камтылган удаалаштыктар.

Жогоруда биз камтылган аралыктардын удаалаштыгы жөнүндө сөз кылдык. Азыр берилген удаалаштыктагы камтылган удаалаштыктар жөнүндө сөз болот.

Берилген $\{x_n\}$ удаалаштыгынын жыйналышы же жыйналбасы жөнүндө изилдөө талап кылынса, анда бул маселе андагы камтылган удаалаштыктардын жардамы менен чечилиши да мүмкүн. Бул түшүнүктү тактап алалы.

Эгерде

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_\kappa < \ldots$$

түрүндөгү натуралдык сандардын анык өсүүчү удаалаштыгын алсак, анда $\{x_{n_\kappa}\}$ удаалаштыгы берилген удаалаштыктагы камтылган удаалаштык деп аталат. Мисалы, 1, 2, 3,... натуралдык сандардын удаалаштыгынан алынган так натуралдык сандардын удаалаштыгы: 1, 3, 5, 7 мурункуга камтылган удаалаштык боло алат, ал эми 3, 5, 7, ... түрүндөгү удаалаштык андай боло албайт (эмне үчүн?).

$\{x_{n_\kappa}\}$ удаалаштыктагы κ индексинин өзгөрүш тартиби $\{x_{n_\kappa}\}$ удаалаштыгындагы n дин өзгөрүш тартибинин так өзүндөй кайталанышы керек. Ошондуктан $n_\kappa \geqslant \kappa$, б.а. $\kappa \to \infty \Rightarrow n_\kappa \to \infty$.

8-теорема. $\{x_n\}$ *удаалаштыгынын жыйналышы үчүн анын бардык камтылган удаалаштыктарынын жыйналышы, болгондо да бир гана пределге жыйналышы зарыл жана жетиштүү.*

○ Эгерде $\{x_n\}$ жыйналуучу болсо, анда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon):$$
$$N < n \Rightarrow |a - x_n| < \varepsilon,$$

демек, каалаган камтылган удаалаштык $\{x_{n_\kappa}\}$ үчүн

$$N < n \Rightarrow |a - x_{n_k}| < \varepsilon$$

деп жаза алабыз. Мунун өзү

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_\kappa} = a$$

дегенди билдирет.

Эгерде бардык камтылган удаалаштыктар бир эле пределге жыйналышса, анда берилген $\{x_n\}$ негизги удаалаштыкты да анын камтылган удаалаштыктардын бири катары караса болот жана ошонун негизинде ал да ошол эле пределге жыйналат. ●

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде $\{x_n\}$ чектелген удаалаштык болсо, анда анын бардык камтылган удаалаштыктары да чектелген болоорун жана тескерисинче да болоорун далилдегиле.

2. Эгерде $\{x_n\}$ монотондуу удаалаштык болсо, анда андагы каалаган камтылган удаалаштык да монотондуу болоорун жана тескерисинче да орун аларын далилдегиле.

2. Камтылган удаалаштыктардын пределдери.

Берилген $\{x_n\}$ удаалаштыгынын каалаган камтылган удаалаштыгы $\{x_{n_k}\}$ алалы жана ал пределге ээ болсун деп эсептейли: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. Анда a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын *айрым предели* деп аталат. Мисалы $\{(-1)^n\}$ удаалаштыгынын эки айрым пределдери бар: -1; 1; ал эми $\{1+(-1)^n n\}$ удаалаштыгы да эки айрым пределге ээ: 0; ∞.

Эгерде $\{x_n\}$ чектелген удаалаштыгынын айрым пределдеринин тобун M менен белгилеп алсак, анда $\sup M$ жана $\inf M$ сандары $\{x_n\}$ удаалаштыгынын жогорку жана төмөнкү пределдери деп аталышат жана аларды $\sup M = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\inf M = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ символдору аркылуу белгилешет.

Мисалы, $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots\}$ удаалаштыгы үчүк

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = 3,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n = 1$ болоорун алабыз.

9-теорема. $\{x_n\}$ ***удаалаштыгынын пределинин жашашы үчүн***

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n \tag{11}$$

барабардыгынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели бар болсун дейли: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, анда 8-теорема боюнча анын бардык камтылган удаалаштыктары бирдей пределге ээ болушат, демек, (11) барабардык орундалат.

Тескерисинче, эгерде (11) барабардык орун алса, анда $\{x_n\}$ тин бардык камтылган удаалаштыктары бирдей пределге ээ болушкан болот, ошонун ичинде, ал удаалаштыктын өзү да ошол эле пределге ээ. ●

Көнүгүүлөр.

1. Төмөндөгү касиетке ээ болгон удаалаштыктардын мисалдарын келтиргиле:

а) анын айрым пределдери болуп алынган удаалаштыктын бардык мүчөлөрү эсептелсин.

б) эки жана үч айрым пределдери болгон удаалаштыктарга мисалдарды келтиргиле.

3. **10-теорема** (Больцан-Вейерштрасс). *Ар кандай чектелген удаалаштыктан жыйналуучу камтылган удаалаштыкты бөлүп алууга болот.*

○ Эгерде $\{x_n\}$ — чектелген удаалаштык болсо, анын анык төмөнкү жана анык жогорку учтары бар: $\inf\{x_n\} = a$, $\sup\{x_n\} = b$, ал эми $\{x_n\}$ удаалаштыктын бардык мүчөлөрү $[a, b]$ кесиндисинде жатат. Удаалаштыктын бир касети — ал чексиз элементтерден турат, ошондуктан $\Delta = [a, b]$ кесиндисин тең экиге бөлсөк: $\Delta = [a, d] \cup [d, b]$ анда булардын эч болбогондо бир бөлүгүндө берилген $\{x_n\}$ удаалаштыгынын чексиз элементтери жаткан болот. Эгерде эки аралык тең анын чексиз элементтерин камтыса, анда алардын бирин, мисалы, оң жаккысын алабыз да, аны $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ аркылуу белгилейбиз. Δ_1 кесиндисинин узундугу $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ ге барабар.

Жогоркудай эле, $[a_1, b_1]$ кесиндисин да тең экиге бөлөбүз, алардан $\{x_n\}$ удаалаштыгынын чексиз элементтерин ичине алган бөлүгүн тандап алып, аны $[a_2, b_2]$ аркылуу белгилейбиз.

Ушундай процессти андан ары да улантып, төмөнкү касиетке ээ болгон $\{[a_n, b_n]\}$ удаалаштыгын алабыз:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$;

2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, эгерде $n \to \infty$.

Демек, $\{\Delta_n\}$ — улам камтылган удаалаштыкты түзөт. Андыктан Кантордун теоремасы боюнча, ал аралыктардын бардыгында жаткан жалгыз бир чекит жашайт:

$$c \in \Delta_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Эми биз ушул чекит c айрым предели болгон $\{x_n\}$ де камтылган удаалаштыктын бар экенин көрсөтөбүз:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c.$$

Δ_1 кесиндиде $\{x_n\}$ удаалаштыгынын чексиз элементи

жаткандыктан, андан бир элементти алабыз да, аны x_{n_1} аркылуу белгилейбиз: $x_{n_1} \in \Delta_1$. Δ_2 кесинди да $\{x_n\}$ удаалаштыгынын чексиз элементин камтыйт. Андан бир элементти алып, аны x_{n_2} аркылуу белгилейбиз: $x_{n_2} \in \Delta_2$. Бул процессти андан ары улап x_{n_k} элементти алабыз: $x_{n_k} \in \Delta_k$.
Андан тышкары,

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k,$$
$$a_k \leq c \leq b_k$$

болгондуктан,

$$\left|x_{n_k} - c\right| \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0, \ k \to \infty$$

деп жаза алабыз. Мунун өзү

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c. \ \bullet$$

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде $\{x_n\}$ – чектелбеген удаалаштык болсо, анда андан жыйналуучу камтылган удаалаштыкты бөлүп алууга болобу?

2. Ар кандай чектелбеген удаалаштыктан айрым предели ∞ ге барабар болгон камтылган удаалаштык бар экенин далилдегиле.

3. Удаалаштыктын жыйналуусу жөнүндөгү Кошинин шарты.

Кошинин удаалаштыгы. $\{x_n\}$ удаалаштыгы Кошинин удаалаштыгы же фундаменталдык удаалаштык деп аталат, эгерде ал үчүн төмөнкүдөй Кошинин шарты аткарылса: каалагандай алынган $\varepsilon > 0$ саны үчүн ага ылайык $N = N(\varepsilon)$ номер табылып жана андан чоң номерлердин бардыгы үчүн $\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса. Кыскача бул шартты мындайча жаза болот:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\\ N<n,\ m\Rightarrow\left|x_n-x_m\right|>\varepsilon,\end{array}\right\}\qquad(12)$$

же дагы башкача:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):$$

$$N>n\Rightarrow\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon\ \forall p\in\mathbb{N}.$$

Кошинин удаалаштыгынын негизги касиеттеринин бири болуп, анын чектелген удаалаштык экенинде.

○ Эгерде $\varepsilon=1$ деген санды алсак, анда Кошинин шарты — (12) формула боюнча бул санга ылайык $N=N(\varepsilon)$ номери табылып жана бардык $n>N$ жана $m>N$ номерлери үчүн $\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon=1$ барабарсыздыгы аткарылат, анын ичинде $\left|x_n-x_N\right|\lessgtr 1$.

$N<n$ үчүн $\left|x_n\right|=\left|x_n-x_N+x_N\right|<\left|x_n-x_N\right|+\left|x_N\right|<\left|x_N\right|+1$ болгондуктан, $c=max\left(\left|x_1\right|,\ldots,\left|x_{N-1}\right|,\ \left|x_N\right|+1\right)$ деген белгилөөнүн жардамы менен бардык $n\in\mathbb{N}$ үчүн $\left|x_n\right|<C$ деп жаза алабыз. Мунун өзү $\left\{x_n\right\}$ — чектелген удаалаштык дегендин өзү. ●

11-теорема. (Кошинин шарты). *Удаалаштыктын пределинин жашашы үчүн анын фундаменталдык болушу зарыл жана жетиштүү.*

Зарылдыгын далилдөө. $\left\{x_n\right\}$ удаалаштыгы пределге ээ деп эсептейли. Анда пределдин аныктамасы боюнча

$$\left.\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon):\\ N<n\Rightarrow\left|x_n-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.\end{array}\right\}\qquad(13)$$

(13) барабарсыздыкты $m>N$ номери үчүн дагы бир жолу жазып:

$$N < m \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

муну алабыз:

$$N < n,\ m \Rightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

б.а. (12) шарт аткарылды.

Жетиштүүлүгүн далилдөө. $\{x_n\}$ — фундаменталдык удаалаштык деп эсептейли. Анын предели бар экендигин далилдейбиз. Фундаменталдык удаалаштыктын аныктамасы боюнча

$$\left.\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon): \\ &N_1 < n, m \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ар кандай фундаменталдык удаалаштык чектелген, демек, Больцан-Вейерштрасстын теоремасы боюнча ал чектелген удаалаштыктан жыйналуучу камтылган удаалаштыкты бөлүп алууга болот:

$$\lim_{\kappa \to \infty} x_{n_\kappa} = a. \tag{15}$$

Эгерде a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели экендиги далилденсе, анда теорема толук далилденген болоор эле. Чындыгында ушундай болорун көрсөтөлү. (15) формуланы аныктоо боюнча мындайча жазып алалы:

$$\left.\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon): \\ &N_2 < \kappa \Rightarrow |x_{n_\kappa} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$N = max\,(N_1, N_2)$ деп алсак, анда $m = n_\kappa$ үчүн (14) формуланы

$$|x_n - x_{n_\kappa}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

түрүндө жазсак болот, себеби $n_\kappa \geqslant \kappa$. Ошондуктан $n > N$ үчүн төмөндөгүнү алабыз:

$$\left|x_n - a\right| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

б.а. $$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$ ●

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ удаалаштыгын алалы. Төмөнкүлөрдү далилдегиле:

а) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: n_0 < n \Rightarrow x_n < 0{,}01$;

б) $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}: n_1 < n \Rightarrow x_n < 0{,}0001$.

в) $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}: n_2 < n \Rightarrow x_n < 0{,}0001$.

2. Логикалык символдордун жардамы менен төмөнкү айтылыштардын аныктамасын келтиргиле:

а) $\{x_n\}$ удаалаштыгы чектелген; чектелбеген; төмөн жагынан чектелген; төмөн жагынан чектелбеген.

б) $\{x_n\}$ өсүүчү удаалаштык; өсүүчү эмес удаалаштык; кемүүчү удаалаштык; кемүүчү эмес удаалаштык; монотондуу удаалаштык; монотондуу эмес удаалаштык.

3. $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n+1}, \ldots$ удаалаштыгын алалы.

а) чексиз кичине камтылган удаалаштыкты жазгыла;

б) бардык эле камтылган удаалаштыктар чексиз кичине болушабы.

в) бул удаалаштыкта чексиз сандагы чексиз кичине камтылган удаалаштыктар бар экендигин далилдегиле.

4. Эгерде $\{x_n\}$ чексиз чон удаалаштык болсо, анда андагы ар кандай камтылган удеалаштыктар чектелбеген экенин далилдегиле.

5. Ар кандай монотондуу удаалаштык бир гана айрым пределге ээ.

6. Ар кандай удаалаштыктан монотондуу камтылган удаалаштыкты бөлүп алууга болоорун далилдегиле.

7. Фундаменталдуу жана фундаменталдуу эмес удаалаштыктардын аныктамаларын келтиргиле.

8. $\{x_n\}$ удаалаштыгынын жогорку жана төмөнкү пределдерин тапкыла, эгерде:

а) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{6}$; б) $x_n = (-1)^n \cdot 5$;

в) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$; г) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$;

д) $x_n = arctg((-1)^n \cdot n)$; е) $x_n = arctg n$.

9. Төмөнкүлөрдү далилдегиле:

а) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq$$
$$\leq \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leq \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq$$
$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

б) бул барабарсыздыктар барабардыкка айланган учурга мисал келтиргиле;

в) бул барабарсыздыктардагы барабардык белги болбой калган учурга мисал келтиргиле.

10. Төмөнкүлөрдү далилдегиле:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0 \ (a > 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

III ГЛАВА

ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ ЖАНА АНЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

§ 1. САНДЫК ФУНКЦИЯ

1. Функция.

Сандык функция. Эгерде X жана $У$ эки көптүк болсо, ал эми f бул X тин ар бир элементин $У$ тин бир элементине туура келтирүүчү эреже (закон) болсо, анда ал эрежени (f ти) функция деп аташат жана аны $f: X \to У$ аркылуу белгилешет. Эгерде $X, У \subset R^1$ — сандык көптүктөр болсо, X көптүгүнүн ар бир элементине x (санына) f эрежеси (закону) боюнча $У$ тин бир элементи y (саны) туура келсе, анда f сандык функциясы берилди деп айтышат жана $f: X \to У$ же $y = f(x)$ аркылуу белгилешет. Бул учурда X көптүгү f функциясынын аныкталуу областы деп аталат да, $D(f)$ аркылуу белгиленет (б.а. $D(f) = X \subset R^1$); ал эми $E(f) = \{y : y = f(x),\ x \in D(f) = X\}$ көптүгү анын маанилеринин көптүгү деп аталат.

Жогорудагы $y = f(x)$ деген жазылмада x ти аргумент же көз каранды эмес өзгөрүлмө, ал эми y ти көз каранды болгон өзгөрүлмө (чоңдук) деп аташат. Эгерде $x_0 \in D(f)$ — аргументтин конкреттүү мааниси болсо, анда ага туура келүүчү $y_0 \in E(f)$ санын f функциясынын $x = x_0$ чекиттеги мааниси деп аташат жана аны $f(x_0)$ же $f(x)\big|_{x=x_0}$ аркылуу белгилешет.

Функцияларды f, φ, F, g ж.б. символдор менен белгилешет. $f: X \to Y$ деген белгилөөнүн ордуна $x \to f(x)$ деп да жазышат.

"Функция" деген сөзгө дагы бир жолу көңүл бура кетели. Функция — бул эреже (закон) $-f: D(f) \to E(f)$; $y \in E(f)$ санын алыш үчүн $x \in D(f)$ саны менен жүргүзүлгөн амал (жол) – эреже. "Функция" деген сөз "өзгөртүп түзүү", "операция", "морфизм", "чагылдыруу" деген сөздөрдүн синоними.

Дагы бир нерсе: талаадагы эгинди тартып келгенде кампа толобу же толбой калабы дегендей эле, X көптүгүн Y көптүгүнө f функциясы аркылуу чагылдырганда f тин маанилеринин көптүгү $E(f) = f(X)$ көптүгүнө дал келеби, $E(f) = Y$, же дал келбейби: $E(f) \subset Y$, деген учурду айырмалап билүүнүн зарылдыгы бар экени кийинчерээк белгилүү болот. Биринчи учурда — "f функциясы X ти Y тин бардыгына чагылдырат", экинчи учурда — "$f: X$ ти Y ке чагылдырат" деп айтышат.

Биз азыр "функция" жөнүндө сөз кылдык. Эми "функциялар" жөнүндө эмне айта алабыз? — ошол суроого токтолсок.

Талаадагы эгинди кампага тартып келүүнүн ар кандай жолдору бар, алардын ичинде аттары эле башка болгону менен эч айырмасы жок да жолдор бар. Анын үстүнө ар кандай жолдорду да, бирдей жолдорду да бир эле убакта пайдаланууга болот. Ошол сыяктуу аныкталуу областы бир болгон ар кандай да, бирдей да, алардын аралашмасы да болгон функциялар бар. Атап айтсак, эгерде эки функциянын аныкталуу областы эле эмес, маанилеринин көптүгү барабар, бирдей болсо, андай функцияларды бир функция деп кароо максатка ылайык:

$$\left[D(f) = D(g) \Rightarrow E(f) = E(g)\right] \Leftrightarrow f = g \text{ же } f(x) = g(x),\ x \in X.$$

Мисалы, эгерде $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbf{R}^1$ жана $g(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}^1$, болсо, анда $f = g$ себеби $\sqrt{x^2} = |x|$, $x \in \mathbf{R}^1$.

Эгерде $X_0 \subset D(f)$, $g(x) = f(x)$, $x \in X_0$ болсо, анда f функциясын g функциясынын уландысы деп аташат. Мисалы,

$X=[0, \infty)$ жана $g(x)=x$, $x \in X_0$ болсо, анда функция $f(x)=|x|$, $x \in \mathbb{R}^1$, g функциясынын уландысы деп аталат.

Эгерде f жана g функциялары бир эле көптүктө ($X \subset \mathbb{R}^1$ көптүгүндө) аныкталган болсо, анда ар бир $x \in X$ үчүн алынган сандык функциялар $f(x)+g(x)=(f+g)(x)$,

$$f(x)-g(x)=(f-g)(x),\ f(x)g(x)=(f \cdot g)(x),$$

$$f(x)/g(x)=(f/g)(x)\ (g(x) \neq 0,\ x \in X)$$

бул функциялардын суммасы, айырмасы, көбөйтүндүсү жана бөлчөгү (тийиндиси) деп аталышат.

Практикада негизинен татаал функциялар кездешет.

Эгерде $x \mapsto f(x)=y$ жана $y \mapsto g(x)=z$ функциялары X жана $У$ көптүктөрүндө аныкталышсын десек, мында f функциясынын маанилеринин көптүгү g функциясынын аныкталуу областында жатат: $E(f) \subseteq D(g)$ деп эсептейбиз, анда ар бир $x \in X$ үчүн $F(x)=g(f(x))=(g \circ f)(x)$ маанини алган функцияны татаал функция, же f жана g функцияларынын *суперпозициясы (композициясы)* деп аташат жана $g \circ f$ аркылуу белгилешет. Мисалы, $F(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, функциясы $x \mapsto 1-x^2$, $x \in [-1, 1]$, жана $y \mapsto \sqrt{y}$, $y \in [0, \infty)$, функцияларынын композициясы болот:

$$F=g \circ f, \text{ мында } z=g(y)=\sqrt{y},\ y=f(x)=1-x^2.$$

Бул композиция элементардык функциялардан куралды. Элементардык функциялардын тобуна негизги элементардык деп аталган функциялардын — даражалуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык, тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялардын — суммасы, айырмасы, көбөйтүндүсү, бөлчөгү жана композициясы аркылуу түзүлгөн функциялар кирет.

Мисалы, төмөнкү функциялар аталган функциялардын тобуна кирет:

а) сызыктуу функция $-y=ax+b$, $a \neq 0$;

б) квадраттык функция $-y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$;

в) n-даражадагы көп мүчө $-y=P_n(x)$,

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_0\neq 0$;

г) рационалдык функция $-y=P_n(x)/Q_m(x)$,

$P_n(x)$ жана $Q_m(x)-n$ жана m— даражадагы көп мүчөлөр.

д) гиперболикалык жана тескери гиперболикалык функциялар да ушул эле топко киришет.

Сандык функциялар көпчүлүк учурда формулалар аркылуу берилет. Муну функциянын берилишинин аналитикалык жолу деп аташат. Мисалы, $y=x^3$, $y=cos2x$, мында $D\ (f)=\mathbb{R}^1$,

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ x<-\frac{\pi}{2},\\ sinx,-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1+x-\frac{\pi}{2},\ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Акыркы учурда функция f үч түрдүү формуланын жардамы аркылуу — аналитикалык жол менен берилди.

Функция таблицанын жардамы менен да берилиши мүмкүн. Мында көз каранды менен көз каранды эмес өзгөрүлмөлөрдүн функционалдык байланышы таблица түрүндө көрсөтүлөт. Таблицада көрсөтүлбөгөн функциянын маанилерин жакындаштырып — болжолдоп алган маанилери менен иш жүргүзүшөт.

Функциянын берилишинин дагы бир жолу — графикалык жол. Мында аргумент менен функциянын мааниси сызыктар аркылуу көрсөтүлөт. Мисалы, медицинада жүректүн иштешин үйрөнүүдө электр кардиограмманы алышат — бул жүрөктүн согушунун убакыттын бирдигине карата өзгөрүшүнүн чагылуусу, ийри сызыктардын мезгилдүүлүгү, үзгүлтүксүздүгү жана үзүндү болуп кеткен учурлары көрсөтүлгөн. Кийинки учурларда экрандан осциллографтардын жардамы менен көп эле кубулуштарды үйрөнүп жаткан учурларды көрүп жүрөбүз. Булардын бардыгы функционалдык көз карандылыктардын графигинин эскиздери.

Мындан башка функция сөз жүзүндө да берилиши мүмкүн. Мисалы, бадыраңдын түшүмүн жакшыртуу үчүн өз убагында сугарып туруу керек. Мында түшүм менен суунун функционалдык көз карандылыгы айтылууда.

Албетте, функциянын берилиши жогоруда аталган жолдордун комбинациясы аркылуу да жүрүшү мүмкүн.

2. Функциянын графиги.

$y=f(x)$, $x \in D(f)$, функциясынын графиги деп *oxy* тик бурчтуу координаталык системадагы координаталары $(x, f(x))$, $x \in D(f)$ болгон тегиздиктеги чекиттердин көптүгү аталат. Анын аныкталуу областындагы ар бир чекит $x_0 \in D(f)$ аркылуу *oy* огуна параллель жүргүзүлгөн түз сызык $x=x_0$, $y=f(x)$, $x \in D(f)$ функциясынын графигин $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде кесип өтөт, мында $y_0=f(x_0)-f$ тин x_0 чекитиндеги мааниси. Эгерде $x=c \in D(f)$ чекитинде $f(c)=0$ болсо, анда c бул $f(x)$ функциясынын нөлү деп аталат. Эгерде $x=c$ бул $f(x)$ функциясынын нөлү болсо, анда ал f функциясынын графиги *ox* огун $x=c$ чекитинде, б.а. $M(c, 0)$ чекитинде кесип өтөт.

Функциянын графигин тургузууда кенен белгилүү болгон функциялардын графиктерин өзгөртүп түзүүнү пайдалануу ылайык. Анын таблицасын келтирели.

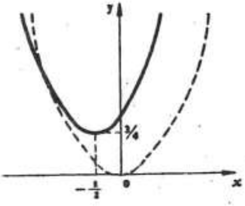
g функциясы	g функциясын өзгөртүп түзүү
$y=g(x)+A$	Ордината огу боюнча A чоңдугуна параллель жылдыруу
$y=g(x-a)$	Абсцисса огу боюнча a чоңдугуна жылдыруу

5*

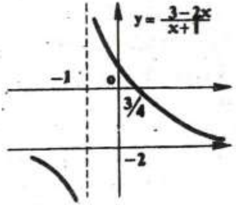
g функциясы	g функциясын өзгөртүп түзүү
$y=-g(x)$	Абсцисса огуна карата симметрия
$y=g(-x)$	Ордината огуна карата симметрия
$y=c\cdot g(x)$	Ар бир ординатаны c га көбөйтүү
$y=g(c\cdot x)$	Ар бир абсциссаны c га көбөйтүү

1-м и с а л. $y=x^2+x+1$ функциясынын графигин чийгиле.

Бул функциянын графигин $y=x^2$ функциясынын графигин өзгөртүп түзүү менен тургузууга болот:
$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ болгондуктан $y=x^2$ тын графигин ox огу боюнча $-\frac{1}{2}$ ге жана oy огу боюнча $\frac{3}{4}$ кө жылдырып 4-чиймедеги графикти алабыз.



4-чийме



5-чийме

2-м и с а л. $y=\frac{3-2x}{x+1}$ функциясынын графигин чийгиле. $y=\frac{3-2x}{x+1}=\frac{5-2(x+1)}{x+1}=\frac{5}{x+1}-2$ болгондуктан, тургузулуучу графикти $y=\frac{5}{x}$ гиперболанын графигин ox огу боюнча

-1 ге жана *оу* огу боюнча -2 ге жылдыруу жолун пайдаланып тургузууга болот (5-чийме).

3-м и с а л. $y=-\left|x^2+x+1\right|$ функциясынын графигин чийгиле.

Таблицада көрсөтүлгөндөй, бул функциянын графиги ордината огуна симметриялуу болгон 1-мисалдын графигинен алынат (6-чийме).

3. Так жана жуп функциялар.

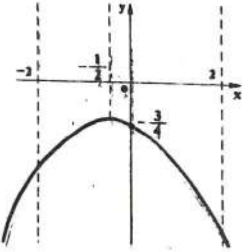
Эгерде f функциясы X көптүгүндө аныкталып, ар бир $x \in X$ үчүн $-x \in X$ жана $f(x)=f(-x)$ болсо, анда f *жуп функция* деп аталат.

Эгерде f функциясы X көптүгүндө аныкталып, ар бир $x \in X$ үчүн $-x \in X$ жана $f(-x)=-f(x)$ болсо, анда *так функция* деп аталат. Мисалы, $y=x^2$, $y=cosx$, $y=ln|x|$, $y=\frac{sin\ x}{x}$ ж. б. – жуп функциялар, ал эми

$$y=\frac{1}{x},\ y=x^3,\ y=sin\ x,$$

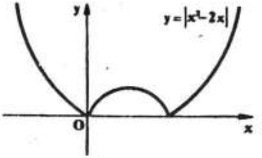
$$y=arcsin(sinx)$$

ж. б. – так функциялар.

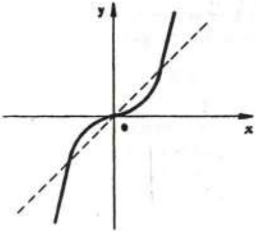


6-чийме

Жуп функциялардын графиги *оу* огуна симметриялуу болот, ал эми так функциянын графиги биринчи жана үчүнчү октанттар аркылуу өткөн биссектрисага симметриялуу келет. Мисалы; $y=\left|x^2-2x\right|$ жуп функциясы менен $y=x^3$ так функциясынын графиктери 7-жана 8-чиймелерде келтирилген.



7-чийме



8-чийме

Бирдей аныкталуу областына ээ болгон эки жуп функциялардын көбөйтүндүсү — жуп, эки так функциялардын көбөйтүндүсү — жуп, так жана жуп функциялардын көбөйтүндүсү — так болоруна ишенүү оңой эле. Мисалы, $y = \sin x \cdot tg\, x$ — жуп, $y = \cos x \cdot tg\, x$ — так функцияларды берет.

Көнүгүүлөр.

1. Төмөнкү берилген функциялардын так же жуп экендигин аныктагыла (мында $D(f) = \mathbb{R}^1$):

а) $f(x) = f(x) + f(-x)$; б) $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$;

в) $\varphi(x^2) = f(x^2)$; г) $\varphi(x) = f(x^3)$;

д) $\varphi(x) = f(|x|)$.

2. Эгерде $g(x)$ — жуп функция болсо, анда $\varphi = f \circ g$ функциясы кандай болот?

3. Эгерде $g(x)$ — так функция болсо, анда $\varphi = f \circ g$ функциясы кандай болот?

4. Ар кандай $f:[-l, l] \to \mathbb{R}^1$ функциясын так жана жуп функциялардын суммасы катарында жазууга болоорун далилдегиле.

5. $f: x \mapsto (x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}^1$ функциясын жуп жана так функциялардын суммасы аркылуу жазгыла.

4. Чектелген жана чектелбеген функциялар.

Эгерде f функциясы X көптүгүндө аныкталса жана бардык $x \in X_0 \subset X = D(f)$ үчүн $f(x) \leqslant M_1$ барабарсыздыгы аткарыла турган M_1 санын табууга мүмкүн болсо, анда f функциясы X_0 көптүгүндө жогору жагынан чектелген деп айтабыз. Бул фактыны кыскача мындайча жазсак да болот:

$$\exists M_1 : x \in X_0 \Rightarrow f(x) \leqslant M_1.$$

Ошондой эле жол менен —

$$\exists M_2 : x \in X_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M_2$$

төмөн жагынан чектелген функциянын (X_0 көптүгүндө) аныктамасын жаза алабыз.

Эгерде f функциясы X_0 көптүгүндө төмөн жагынан да, жогору жагынан да чектелген болсо, анда аны ал көптүктө *чектелген функция* деп айтабыз.

X_0 көптүгүндө чектелген f функцияны кыскача жазалы:

$$\exists\, M > 0 : x \in X_0 \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Ал үчүн $M = max\left(|M_1|, |M_2|\right)$ деп алсак жетиштүү болот. Эгерде

$$\exists M > 0 \;:\; x \in D(f) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M \tag{1}$$

болсо, анда $f(x)$ ти чектелген функция деп аташат. $X_0 \subset X$ көптүгүндөгү чектелген функциянын геометриялык сүрөттөлүшү $y = f(x),\ x \in X_0$, функциясынын графиги $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ тилкеде жаткандыгын билдирет.

Мисалы, $y = 2^x$ функциясы $D(f) = X = \mathbb{R}^1$ де аныкталган, ал эми $X_0 = [0,1] \subset X$ те бул функция чектелген: $|2^x| \leqslant 2$.

Эгерде $X_0 = D(f)$, анда функция чектелбеген, б.а.

$$\forall M > 0\ \exists x_0 \in X_0 : |f(x)| > M \tag{2}$$

барабарсыздыгы орун алат (себеби $2^x \to \infty,\ x \to \infty$).

Эгерде $X_0 \in D(f)$ жана $f(x_0) = \{y \in Y : y = f(x),\ \ x \in X_0\}$ болсо, анда $Y = f(X_0)$ көптүгүнүн накта жогорку учун X_0

көптүгүндөгү f функциясынын накта жогорку учу деп аташат, аны $\sup\limits_{x\in X_0} f(x)$ аркылуу белгилешет. Ошондой эле $\inf\limits_{x\in X_0} f(x)=\inf Y$. $X_0=D(f)$ учурда X_0 көптүгүнө кайрылуунун зарылчылыгы жок.

Эгерде $x\in X_0 \Rightarrow f(x)\leqslant f(x_0)$ болсо, анда f функциясы X_0 көптүгүндөгү x_0 чекитинде эң чоң (максималдык) мааниге ээ деп айтышат жана $f(x_0)=\max\limits_{x\in X_0} f(x)$ деп белгилешет. Бул учурда

$$f(x_0)=\sup_{x\in X_0} f(x).$$

Ошондой эле, эгерде $\exists\, x_0\in X_0{:}\, x\in X_0\Rightarrow f(x)\geqslant f(x_o)$ болсо, анда f функциясы X_o көптүгүнүн x_o чекитинде эң кичине (минималдык) мааниге ээ деп айтышат жана $f(x_0)=\min\limits_{x\in X_o} f(x)$ деп жазышат. Бул учурда $f(x_o)=\inf\limits_{x\in X_o} f(x)$.

Функциянын минималдык жана максималдык маанилерин анын экстремалдык маанилери деп аташат.

Көнүгүүлөр,

1. Чектелген эки функциянын композициясы чектелген экенин далилдегиле.

2. $f{:}[0,\ 1]\to \mathbb{R}^1$ функциясы ар бир $\left[\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}$, кесиндисинде чектелген болсо, анда ал $[0,1]$ де чектелген болобу?

3. Эгерде f — чектелген, ал эми g — чектелбеген болсо, анда $f\cdot g$ чектелбегенби же чектелгенби?

5. Монотондуу функциялар.

Эгерде f функциясы $X \subset D(f)$ областында аныкталып, анын ар бир чекити x_1 жана x_2 үчүн $x_1 < x_2$ барабарсыздыгынан $f(x_1) \leq f(x_2)$ барабарсыздыгы келип чыкса, анда f функциясы X те *өсүүчү функция* деп аталат. Ал эми $x_1 \leq x_2$ ден $f(x_1) < f(x_2)$ келип чыкса, анда f ти X көптүгүндө *анык өсүүчү функция* деп аташат.

Мына ошентип:

1) эгерде

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

болсо, анда f функциясын X көптүгүндө өсүүчү деп,

2) эгерде

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

болсо, анда f функциясын X көптүгүндө анык өсүүчү деп аташат.

Ошондой эле.

а) эгерде

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

болсо, анда f функциясын X көптүгүндө кемүүчү деп,

б) эгерде

$$\forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X : \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

болсо, анда f функциясын X көптүгүндө анык кемүүчү деп аташат.

Өсүүчү жана кемүүчү функцияларды *жалпы жагынан монотондуу функциялар* деп, анык өсүүчү жана анык кемүүчү функцияларды — *анык монотондуу функциялар деп аташат.*

Эгерде $X = D(f)$ болсо, анда бул аныктамаларда X көптүгүн өзүнчө көрсөтүүнүн зарылчылыгы жок.

Көнүгүүлөр.

1. Сызыктуу функция — $f{:}\,x \to ax + b$ монотондуу экенин көрсөткүлө.

2. $f: x \to ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ функциясы монотондуу эмес экенин далилдегиле.

3. Эгерде f жана g функциялары өсүүчү болсо, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ жана $f/g (g(x) \neq 0,\ x \in D(g))$ функциялары монотондуу болушабы?

4. Монотондуу функция жуп (так) боло алабы?

5. Монотондуу функция мезгилдүү боло алабы?

6. Эгерде $D(f) = D(g) = \boldsymbol{R}^1$ жана f монотондуу функция болсо, анда $f \cdot g$ функциясы монотондуу боло алабы?

6. Мезгилдүү функциялар.

Кайсы бир $T > 0$ саны үчүн $x \in D(f) \Rightarrow x - T \in D(f)$ жана $x + T \in D(f)$ болуп жана

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T)$$

барабардыгы аткарылсын дейли. Мындай функцияны мезгилдүү функция деп, ал эми T санын анын мезгили деп аташат.

Албетте, эгерде T саны f функциясынын мезгили болсо, анда nT сандары да

$$f(x - nT) = f(x) = f(x + nT)$$

барабардыгын аткара алышат, мында $n \in \boldsymbol{Z}$; $n \neq 0$.

Мисалы, $2\pi = T$ саны $\sin x$ жана $\cos x$ функцияларынын мезгили, ал эми $T = \pi$ саны $tg\, x$ жана $ctg\, x$ функцияларынын мезгили болуп кызмат кылышат.

1-мисал. $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ саны $f(x) = \sin\alpha x$ функциясынын мезгили экенин далилдегиле.

△ Биринчиден,

$$\sin\alpha x = \sin\alpha(x+T) \tag{3}$$

барабардыгын канааттандырган $T > 0$ санынын бар экендигин далилдешибиз керек. Экинчиден, $\dfrac{2\pi}{\alpha}$ саны андай сандардын эң кичинеси экенине ишенген болсок, анда талап кылынган далилденген болот. Чынында да, эгерде (3) барабардык орун алган болсо, анда $x = 0$ учуру үчүн

$$\sin\alpha T = 0 \Rightarrow T = \frac{\kappa\pi}{\alpha},\ \kappa \in \mathbb{N}$$

экендигин алабыз. Бирок $T = \frac{\pi}{\alpha}$ саны (3) барабардыкты канааттандырбайт, себеби андай болгон учурда бардык $x \in \mathbb{R}^1$ үчүн $\sin\alpha x = \sin\alpha\left(x + \frac{\pi}{\alpha}\right) = -\sin\alpha x$, мындан $\sin\alpha x = 0$ болоорун алмакпыз. Ошондуктан T санын $\frac{2\pi\kappa}{\alpha}$ түрүндөгү сандардан гана ала алабыз:

$$\sin\alpha x = \sin\alpha\left(x + \frac{2\pi\kappa}{\alpha}\right),\ \kappa \in \mathbb{N}.$$

Мындай сандардын эң кичинеси — $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ саны: $\sin\alpha x = \sin\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right)$. ▲

2-мисал. $f(x) = \sin x^3$ функциясы мезгилсиз функция экендигин далилдегиле.

△ Эгерде (3) барабардыкты канааттандырган $T > 0$ саны бар десек, анда

$$\sin x^3 = \sin (x + T)^3$$

болоорун, андан $x = 0$ үчүн $\sin T^3 = 0 \Rightarrow T = \sqrt[3]{\pi\kappa},\ \kappa \in \mathbb{N}$ экендигин алабыз. Демек, (3) барабардыкты канааттандырган $T > 0$ саны бар болсо, аны $T_n = \sqrt[3]{\pi n},\ n \in \mathbb{N}$, сандарынын ичинен издешибиз керек. T_{n_0} — ошондой сандардын эң кичинеси болсун деп эсептейли. Анда $T_{n_0} = \sqrt[3]{\pi n_0},\ n_0 \in \mathbb{N}$, бирок $x \in (0, \sqrt[3]{\pi})$ үчүн $\sin x^3 \neq 0$ жана $\sin x^3$ функциясынын $(0, \infty)$ аралыгындагы бардык нөлдөрү $x_n = \sqrt[3]{\pi n},\ n \in \mathbb{N}$ түрүндө болоорун көрөбүз. Бул нөлдөрдүн жанаша жаткан экөөнүн ортосундагы аралык

$$r_n = \sqrt[3]{(n+1)\pi} - \sqrt[3]{n\pi} = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}} \to 0,\quad n \to \infty,$$

экени да көрүнүп турат. Ошондуктан каралып жаткан биринчи эки нөлдүн аралыгы $\sqrt[3]{\pi}$ ге барабар, атап айтсак: $x=0$ жана $x=\sqrt[3]{\pi}$. Албетте, бул эки нөлдүн аралыгы $T_{n_0}=\sqrt[3]{\pi n_0}$ гө барабар болгон $\left[0,\ \sqrt[3]{\pi n_0}\right]$ кесиндисинде жатат. Мындай болууга мүмкүн эмес, себеби $\sqrt[3]{\pi}<\sqrt[3]{\pi n_0}=T_{n_0}$, биз T_{n_0} санын каралып жаткан функциянын мезгили деп алганбыз. ▲

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде f функциясынын мезгили T болсо, анда төмөндөгү g функциясы мезгилдүү боло алабы?

а) $g(x)=f(x+a),\ a\in\mathbf{R}^1$;

б) $g(x)=af(x+b)+c,\ a,\ b,\ c\in\mathbf{R}^1$;

в) $g(x)=f(x^2),\ f(x^3)$;

г) $g(x)=f(\sqrt{x})$.

2. Эгерде f — мезгилдүү болсо, $f\circ\varphi$ функциясы жөнүндө эмнени айтууга болот?

3. Эгерде f жана g функцияларынын мезгилдери T_1 жана T_2 $(T_1\neq 0,\ T_2\neq 0)$ болсун дейли. Анда:

а) эгерде $T_1/T_2\in Q$ болсо, анда $f+g$ функциясы мезгилдүү экенин далилдегиле. Анын мезгили эмнеге барабар?

б) эгерде $T_1/T_2\,\overline{\in}\,Q$ болсо $f+g$ функциясы мезгилдүү боло алабы?

7. Тескери функция.

Функциянын аныктамасы боюнча, ар бир $x_0\in D(f)$ үчүн $E(f)$ көптүгүнөн $f(x)$ функциясынын бир гана мааниси туура келет. Бул маселенин тескерисинче коюлушу да табигый нерсе: функциянын берилген y_0 мааниси боюнча аргументтин маанисин табуу керек болсо, б.а.

$$f(x) = y_0,\ y_0 \in E(f)$$

теңдемесин чыгарууда ар бир $y_0 \in E(f)$ үчүн аргументтин бир гана маанисин алууга болобу? Эгер мүмкүн болсо, кандай шарттарда? Бардык эле шарттарда ал мүмкүн болбоосун төмөнкү мисалдар көрсөтүп турат.

а) Эгерде $f(x) = x^2$ болсо, анда $y_0 = 4 \in E(f)$ үчүн $x^2=4$ теңдемеси эки чыгарылышка ээ: $x_1=2$ жана $x_2=-2$.

б) Эгерде $f(x) = cosx$ болсо, анда $y_0 = 1 \in E(cos)$ үчүн $cosx = 1$ теңдемеси чексиз көп чыгарылышка ээ: $x_n = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

в) Эгерде $f(x) = x^3$ болсо, анда $y_0 = 8 \in E(f)$ үчүн $x^3=8$ теңдемеси бир чыгарылышка ээ, $x=2$.

Аныктама. *Эгерде $E(f)$ көптүгүнүн ар бир элементине кандайдыр бир эрежении (формуланын) жардамы менен бир гана аргументти табууга мүмкүн болсо, анда ал эрежени берилген f функциясынын тескери функциясы деп атайбыз жана аны $f^{-1}: E(f) \to D(f)$ аркылуу белгилейбиз.*

Бул учурда

$$f(x) = y$$

теңдемеси ар бир $y \in E(f)$ үчүн бир гана чыгарылышка ээ:

$$x = f^{-1}(y).$$

f^{-1} функциясы үчүн аргумент болуп y, ал эми анын мааниси болуп x эсептелет. Бирок тескери функцияны да, мурдагы берилген f функциясын да функция катарында гана карай турган болсок, анда анын маанисин жана анын аргументин да, башка функциялардай эле өз ара y жана x аркылуу белгилөө ыңгайлуу:

$$y = f^{-1}(x),\ x \in D(f^{-1}).$$

Эгерде f^{-1} — берилген f функциясына тескери функция болсо, анда f — алынган f^{-1} функциясына тескери функция болот:

$$D(f^{-1}) = E(f);\ \ E(f^{-1}) = D(f).$$

б.а. f^{-1} функциясынын аныкталуу областы f функциясынын маанисинин көптүгү, ал эми f^{-1} функциясынын маанисинин көптүгү f функциясынын аныкталуу областы болуп калышат.

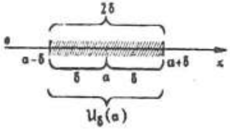
Андан башка, ар бир $x \in D(f)$ үчүн

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

жана ар бир $y \in E(f)$ үчүн $f(f^{-1}(y)) = y$.

§ 2. ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ ЖӨНҮНДӨГҮ АНЫКТАМАЛАР

$y = f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги пределинин аныктамасын бир нече жол менен берүүгө болот. Алардын ичинен эң элестүү бериле турган аныктамасына токтололу. Ал аймактардын жардамы менен берилет. Ошондуктан, биринчи иретте, чекиттин аймагы деген түшүнүккө токтололу.



9-чийме

Абсцисса (ox) огундагы a чекитинин "δ-аймагы" (дельта-аймагы) деп борбору a жана узундугу 2δ болгон интервалды айтабыз (9-чийме).

Башкача айтканда, a чекитинин "δ-аймагы" деп төмөнкү көптүктү айтабыз:

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^1 : |x - a| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R}^1 : a - \delta < x < a + \delta\}. \quad (1)$$

Бул көптүк эмнелер менен мүнөздөлүп турат? Байкап көрсөк, $U_\delta(a)$ көптүгү a чекити жана $\delta > 0$ саны менен мүнөздөлүп турганын көрөбүз. Дагы бир нерсе — $a - \delta$ жана $a + \delta$ чекиттери — $U_\delta(a)$ көптүгүнүн сол (төмөнкү) жана оң (жогорку) учтары да бул көптүктү мүнөздөп турат, бирок ал чекиттерди биз көңүлгө атайлап эле албай отурабыз, себеби — ал чекиттер бизди өтө эле кызыктыра турган чекиттерден болсо, анда $\delta > 0$ санын чоңураак алып, каралып жаткан көптүктүн учтарын көңүл бөлүнбөгөн чекиттерине айландырууга практикада жетише алабыз. Эң негизгиси анда эмес экен, бирок буларды эмне үчүн айтып жатабыз? Сөз — ошол эле $U_\delta(a)$ көптүгүнүн эки учтарын эмес, айрым учурда a чекитинин өзүн да, б.а. $U_\delta(a)$ көптүгүнүн борборун да эсепке албай коюуга болорун айтмакпыз. Бул параграфта — функциянын пределин карап жаткан кезде — так ушундай жолдо бара алабыз. $U_\delta(a)$ көптүгүнүн жогоруда айтылган үч чекитинен башка анын чекиттеринин бардыгы бизди кызыктырат.

Эми бизди кызыктырган жана кызыктырбаган чекиттер кандай мааниде айтылып жатканына токтоло кетели. Айталы, a чекитин алалы жана анын "δ-аймагын" белгилейли. Биз бул чекитте берилген функциянын пределин карайбыз. Ал үчүн биз функция $U_\delta(a)$ көптүгүнүн чекиттеринде аныкталган деп эсептейбиз. Бирок бул көптүктүн учтарында аныкталганы же аныкталбаганы, жогоруда айтылгандай, практикада мааниси жокко эсе. Демек, каралып жаткан функция $U_\delta(a)$ көптүгүнүн учтарында аныкталбаган деп эле эсептеш керек, б.а. бул мааниде ал чекиттер бизди кызыктырбайт. Ушул эле мааниде a чекитинин өзү да бизди кызыктырбайт, бул чекитте функция аныкталганбы же аныкталбаганбы, биз үчүн мааниге ээ эмес. Тагыраак болсун үчүн $U_\delta(a)$ көптүгүнүн ордуна

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^1:|x-a|<\delta,\ x\neq a\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^1:\ 0<|x-a|<\delta\right\}\quad(2)$$

көптүгүн алабыз жана бул көптүк a чекитинин "борбору жок δ-аймагы" деп аталат.

Абсцисса огунан алынган a чекитинин δ-аймагы болгондой эле, б.а. $U_\delta(a)$ көптүгү сыяктуу эле, ордината (0_y) огунан да кайсы бир A чекитинин "эпсилон аймагы", б.а.

$$U_\varepsilon(A)=\left\{y\in\mathbb{R}^1:|y-A|<\varepsilon\right\},$$

көптүгү каралышы мүмкүн.

1-аныктама. *Эгерде $y=f(x)$ функциясы $x=a$ чекитинин кайсы бир аймагында аныкталып, мында a чекитинин өзүндө функция аныкталбашы да мүмкүн, жана кандай* *гана кичине оң сан албайлы, аны ε менен белгилеп алалы, ага ылайык $\delta > 0$ саны табылып (бул фактыны $\delta = \delta(\varepsilon)$ аркылуу белгилешет) жана $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ көптүгүндө жаткан бардык x үчүн анын образы $y=f(x)$ кайсы бир A чекитинин $U_{\varepsilon}(A)$ аймагында жатса, анда бул A саны $y=f(x)$* **функциясынын $x = a$ чекитиндеги предели** *деп аталат. Башкача айтканда, эгерде $y = f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинин кайсы бир аймагында аныкталып, мында a чекитинин өзүндө функция аныкталбашы да мүмкүн, жана*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A)$$

болсо, анда A саны $y = f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги предели деп аталат.

Бул учурда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{3}$$

деп жазышат.

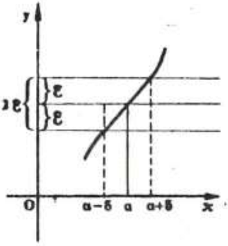
Ушул эле 1-аныктаманы, б.а. (3) формуланы, барабарсыздык "$\varepsilon - \delta$" аркылуу да берсек болот.

2-аныктама. *Эгерде $y = f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинин кайсы бир аймагында аныкталып, мында a чекитинин өзүндө функция аныкталбашы да мүмкүн, жана*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta>0 = \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \tag{4}$$

болсо, анда A саны $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги предели деп аталат.



10-чийме

Бул аныктаманы функциянын предели жөнүндөгү *Кошинин аныктамасы* деп коюшат (10-чийме).

Жогоруда берилген эки аныктаманын тең күчтө (эквиваленттүү) экени (1) — (2) формуладан көрүнүп турат.

Дагы бир аныктаманы удаалаштыктардын термини аркылуу келтирели.

3-аныктама. *Эгерде $y = f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинин кайсы бир аймагында (мисалы $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ көптүгүндө), аныкталып, мында a чекитинин өзүндө функция аныкталбашы да мүмкүн, жана предели a болгон ар кандай $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ удаалаштык үчүн $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгынын предели A болсо, анда A саны $f(x)$ функциясынын $x=a$ чекитиндеги предели деп аталат, б.а.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{5}$$

Бул аныктаманы функциянын предели жөнүндөгү *Гейненин аныктамасы* деп коюшат.

1-теорема. *Функциянын предели жөнүндөгү Кошинин жана Гейненин аныктамалары тең күчтө (эквиваленттүү). Функциянын предели жөнүндөгү Кошинин жана Гейненин аныктамаларында функция $x = a$ чекитинин кайсы бир борбору жок аймагында аныкталган деп эсептелинет, б.а. кайсы бир $\delta > 0$ саны үчүн*

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a) \subset D(f).$$

○ а) Эгерде A саны $y = f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитинде Кошинин аныктамасы боюнча предели болсун десек, анда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \tag{6}$$

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Предели a болгон каалагандай $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ удаалаштыгын алалы, башкача айтканда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Удаалаштыктын предели жөнүндөгү аныктама боюнча көрсөтүлгөн $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны үчүн ага ылайык номер $N = N(\delta)$ табылат да,

$$N(\delta) < n \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$$

барабарсыздыгы аткарылат, демек, (6) формула боюнча

$$N(\delta) < n \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A).$$

Мына ошентип, төмөндөгүнү жаза алабыз:

$$\begin{gathered} \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \\ N(\varepsilon) < n \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(A), \end{gathered} \tag{7}$$

мында $N(\varepsilon) = N(\delta(\varepsilon))$ жана (7) формула каалаган a чекитине жыйналуучу $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ үчүн аткарылат.

Мунун өзү $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ дегенди берет, б.а. A саны $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги Гейне боюнча предели боло тургандыгы далилденди.

б) Эгерде A саны f функциясынын $x = a$ чекитиндеги Гейне боюнча предели болсо, анда ушул эле сан f тин $x = a$ чекитиндеги Коши боюнча предели болорун далилдейли. Муну далилдеш үчүн A саны f тин $x = a$ чекитиндеги Гейне боюнча предели болсун, бирок бул сан Коши боюнча f тин a дагы предели болбосун деп эсептейли: Анда

$$\begin{gathered} \exists\ \varepsilon_0 > 0:\ \forall\delta > 0\ \exists x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a): \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0. \end{gathered} \tag{8}$$

(8) формула боюнча $\delta = \dfrac{1}{n}$ жана $x_n = x_{1/n} \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(a)$ деп ала алабыз. Ошондуктан (8) формуланы

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_{1/n}) - A| \geqslant \varepsilon_0$$

түрүндө жаза алабыз. Мындан, бир жагынан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}_{1/n}(a)$; экинчи жагынан A саны $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгынын предели болбой тургандыгы келип чыгат. Демек, A саны $f(x)$ функциянын $x = a$ чекитиндеги Гейне боюнча предели болбой турганын алдык. Мунун өзү биздин алган болжолдообузга карама-каршы келет.●

1. Пределдердин түрлөрү.

а) **Бир жактуу пределдер.** A санын $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги *сол предели* деп аташат жана аны $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ же $f(a-0)$ аркылуу белгилешет, эгерде төмөндөгүдөй шарт аткарылган болсо: f функциясы $x=a$ чекитинин сол аймагында аныкталып жана

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$

$$x\in(a-\delta,\ a)\Rightarrow\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$$

Ал эми

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$

$$x\in(a,\ a+\delta)\Rightarrow|f(x)-B|<\varepsilon$$

болсо, анда B санын f функциясынын a чекитиндеги оң предели деп аташат жана аны $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ же $f(a+0)$ аркылуу белгилешет.

A жана B сандары f функциясынын a чекитиндеги сол жана оң аймагындагы абалын мүнөздөйт, ошондуктан функциянын оң жана сол пределдерин *бир жактуу пределдер* деп аташат. Эгерде $a=0$ болсо, анда сол жана оң пределдерди өз ара $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=f(-a)$ жана $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=f(+0)$ аркылуу белгилешет.

Мисалы, эгерде $f(x)=sgn x$ болсо, мында

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{эгерде } x<0,\\ 0, & \text{эгерде } x=0,\\ 1, & \text{эгерде } x>0,\end{cases}$$

анда

$$A=f(-0)=-1,\ B=f(+0)=1,\ A\neq B.$$

Бирок f тин $a=0$ дөгү предели жок. (Эмне үчүн?)

Ал эми

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{1/(x-1)}},\ x\neq1,\ a=1,$$

болсо, анда

$$A=f(1-0)=1;\ B=f(1+0)=1.$$

демек, $C=\lim\limits_{x\to1} f(x)=1.$

6*

б) **Ф у н к ц и я н ы н ч е к с и з д е г и п р е д е л д е р и.** Эгерде f функциясы $[a, \infty)$ аралыгында аныкталган болсо, анда бул функциянын $x \to +\infty$ учурдагы предели жөнүндө айтууга болот, атап айтсак: эгерде

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon):$$
$$x \geqslant \delta \Rightarrow |f(x) - D| < \varepsilon$$

шарты аткарылса, анда D санын f тин $x \to +\infty$ учурдагы предели деп аташат жана $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = D$ деп белгилешет.

Мисалы, эгерде $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{x + 1}$ болсо, анда

$$f(x) = -3 + \frac{7}{x+1} < \frac{7}{x+1} < \frac{7}{x} (x > 1).$$

Андыктан, берилген $\varepsilon > 0$ үчүн $|f(x) + 3| < \dfrac{7}{x} < \varepsilon$, эгерде $x > \delta$, мында $\delta = max\left(1, \dfrac{7}{x}\right)$. Демек, $D = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$.

Ушул эле аныктаманы төмөндөгүдөй берүүгө да болот: эгерде

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon):$$
$$x \in U_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(D)$$

болсо, анда D санын $x \to +\infty$ учурдагы f тин предели деп айтабыз.

в) **Ф у н к ц и я н ы н ч е к с и з п р е д е л д е р и.** Эгерде

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon):$$
$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$$

шарты аткарылса, анда f функциясы a чекитинде чексиз пределге ээ болот деп айтышат жана аны $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ деп жазышат. Бул учурда f функциясы $x \to a$ учурда *чексиз чоң* деп да айтышат. Жогорудагыдай эле бул учурда да f функция $x = a$ чекитинин өзүндө аныкталбаган да болушу мүмкүн.

Мисалы, эгерде $f(x)=\frac{1}{x}$ болсо, анда ар кандай берилген $\varepsilon>0$ саны үчүн $\delta=\delta(\varepsilon)$ санын табууга болот жана ал үчүн $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow|f(x)=|\frac{1}{x}|>\varepsilon$, мында $\delta=\frac{1}{\varepsilon}\cdot$ $x=0$ чекитинде функция аныкталган эмес.

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде f тин a дагы предели бар болсо, б.а. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$ болсо, анда анын сол предели — $A=f(a-0)$ да, оң предели — $B=f(a+0)$ да бар жана алар барабар: $A=B$ (далилдегиле).

2. Эгерде f тин a дагы сол предели — A жана оң предели — B бар болуп жана алар барабар болушса: $A=B$, анда f тин бул чекиттеги предели да бар: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C=A=B$ (далилдегиле).

3. Функциянын бир жактуу пределдеринин аныктамасын Гейне боюнча бергиле.

4. Функциянын $x\to+\infty$ учурдагы пределинин аныктамасын Гейне боюнча бергиле.

5. Функциянын $x\to-\infty$ учурдагы пределинин аныктамаларын бергиле.

6. Функциянын $\lim f(x)\to=-\infty$ учурдагы аныктамасын бергиле жана ага мисал келтиргиле.

7. Функциянын чексиз пределдеринин аныктамасын Гейне боюнча бергиле.

2. Көптүктүн пределдик чекиттери.

Эгерде a чекитинин ар кандай аймагында E көптүгүнүн эч болбогондо бир чекити (a га барабар болбогон) бар болсо, анда a бул E көптүгүнүн *пределдик чекити* деп аталат.

Эми бизге $f: X\Rightarrow\mathbb{R}^1$ функциясы берилсин дейли, ал эми $E\subset X$ — каралып жаткан функциянын аныкталуу областынан алынган көптүк болсун да, a чекити — E нин пределдик чекити болсун дейли.

Аныктама. *Эгерде*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$x \in E,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$$

шарты аткарылса, анда C саны f функциясынын a чекитиндеги E боюнча предели деп аталат жана аны $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = C$ *деп жазышат.*

Мисалы, эгерде $f(x) = sgn\ x$ болсо, анда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(+0) = 1 \text{ жана } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(-0) = -1.$$

3. Функциялардын пределдеринин касиеттери.

Төмөндө сөз функциянын берилген чекиттеги чексиз эмес пределдери жөнүндө болмокчу. Биз a чекити дегенде a санын, же $-\infty$, же $+\infty$, же ∞ деген белгилердин бирин айта алабыз. Каралып жаткан функция a чекитинин кайсы бир аймагында аныкталган, бирок ал аймакта a чекитинин өзү бар же жогу биз үчүн бирдей.

а) Пределге ээ болгон функциялардын локалдык касиеттери. Берилген функциянын a чекитиндеги предели жөнүндө сөз кылганыбызда биз ошол функция a чекитинин кайсы бир аймагында аныкталганын биз билебиз, бирок ал чекиттин өзүндө каралып жаткан функция аныкталганбы же жокпу, аны менен кызыкпайбыз. Биз төмөндө пределге ээ болгон функциялардын тигил же бул касиеттери жөнүндө айтканыбызда, ал касиеттер жогоруда айтылган a чекитинин аймагында гана орун аларын, б.а. алардын локалдык касиеттери жөнүндө гана болорун түшүнөбүз.

1-касиет. *Эгерде f функциясы a чекитинде пределге ээ болсо, анда бул функциянын бардык мааниси чектүү көптүктү түзгөн a чекитинин кайсы бир аймагын табууга болот.*

○ f функциясы a чекитинде пределге ээ дейли: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Аныктама боюнча

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon):\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Мындан $\varepsilon = 1$ учурду алсак, анда

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$$

экендигин алабыз. Демек, f функциясы $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ көптүгүндө чектүү. ●

2-касиет. *Эгерде* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *жана* $A \neq 0$ *болсо, анда А санынын белгиси кандай болсо, f функциясынын бардык маанилери да ошол белгини бере алган а чекитинин кайсы бир аймагын көрсөтүүгө болот (ал аймак а чекитинин өзүн камтыбаган болушу мүмкүн).*

○ Пределдин аныктамасы боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$
$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Мындан $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$ учурду алсак, анда

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2},$$

же

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

Эгерде $A > 0$ болсо, анда акыркы барабарсыздыктын сол жагынан төмөнкүнү алабыз:

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2} > 0.$$

Эгерде $A < 0$ болсо, ошол эле барабарсыздыктын оң жагынан

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) < \frac{A}{2} < 0$$

экендигин алабыз. ●

3-касиет. *Эгерде* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *жана* $A \neq 0$ *болсо, анда* $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ *көптүгүндө* $1/f(x)$ *функциясы чектүү функция боло алгандай* $\delta > 0$ *санын көрсөтүүгө болот.*

○ Пределдин аныктамасы боюнча

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$

$$x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Мындан $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$ учурду алсак, анда

$$x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow |f(x)-A|<\frac{|A|}{2}.$$

Эгерде бизге белгилүү болгон

$$|A|-|f(x)|\leqslant |f(x)-A|$$

барабарсыздыкты эске алсак, анда акыркы эки барабарсыздыктардан $|A|-|f(x)|<\dfrac{|A|}{2}$ экенин алабыз, андан ары $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$ болоорун көрөбүз, демек,

$$x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}<\frac{2}{|A|}$$

болот. ●

б) **Барабарсыздыктар менен байланышкан пределдердин касиеттери.**

1-касиет. *Эгерде кайсы бир $\delta>0$ саны үчүн*

$$x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow \varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$$

жана

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=A$$

болсо, анда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A.$

○ Функциянын пределинин Гейне боюнча берилген аныктамасын пайдаланалы.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ болгон каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгын алсак, анда Гейненин аныктамасы боюнча

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim_{n\to\infty}\psi(x_n)=A$$

орун аларын жаза алабыз. Бирок

$$N < n \Rightarrow \varphi(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant \psi(x_n)$$

барабарсыздыгынан (II гл. 2-п.) боюнча $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ болоруна келебиз. Демек, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. ●

2-касиет. *Эгерде кайсы бир $\delta > 0$ саны үчүн*

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \leqslant \psi(x)$$

жана

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \qquad B = \lim_{x \to a} \psi(x)$$

болсо, анда $A \leqslant B$.

○ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ болгон каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгын алсак, анда Гейненин аныктамасы боюнча

$$A = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \psi(x_n) = B$$

болоорун алабыз. Ал эми алынган $\{x_n\}$ удаалаштыктын эркинче алынганын эске алсак, далилденүүчү келип чыкканын көрөбүз.●

1-э с к е р т ү ү. Эгерде келтирилген барабарсыздыкта барабардыктын белгиси жок болсо, б.а.

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) < \psi(x)$$

болсо, анда деле $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$ (б.а. $A \leqslant B$) барабарсыздыгын алмакпыз.

в) Ч е к с и з   к и ч и н е   ф у н к ц и я л а р. Эгерде $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ болсо, анда $f(x)$ функциясы $x \to a$ үчүрда *чексиз кичине функция* деп аталат жана бул фактыны $x \to a$ үчүрда

$$f(x) = 0(1) \tag{1}$$

аркылуу белгилешет.

Чексиз кичине функциялар төмөндөгүдөй касиеттерге ээ.

Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары $x \to a$ үчүрда чексиз кичине болушса, анда

1) *$f(x) + \varphi(x)$ функциясы $x \to a$ үчүрда чексиз кичине болот;*

2) *$f(x)\varphi(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз кичине болот.*

○ Аныктама боюнча

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon):$$
$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Мында ушул эле $\varepsilon > 0$ саны үчүн

$$\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon):$$
$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon.$$

Демек, $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ саны үчүн

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)| + |\varphi(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

болоорун жаза алабыз. Мунун өзү $x \to a$ учурда $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) + \varphi(x)\right) = 0$ дегенди берет (себеби $\varepsilon > 0$ — каалагандай кичине сан болгондуктан эми анын ордуна $\varepsilon/2$ санын алып айтылгандарды кайталоого болот). Биринчи касиет далилденди.

Экинчи касиетти далилдөө үчүн аныктама боюнча

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon):$$
$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

жана $\varepsilon = 1$ саны үчүн

$$\exists\delta_2 = \delta_2(\varepsilon):$$
$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(x)| < 1$$

экенин көрөбүз. Демек, $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ саны үчүн

$$|x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)\varphi(x)| \leqslant |f(x) < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

экендигин алабыз. Мунун өзү $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x) = 0$ дегенди билдирет. ●

1-натыйжа. *Чектүү сандагы $x \to a$ учурдагы чексиз кичине функциялардын алгебралык суммасы ушул эле учурда чексиз кичине функцияны берет.*

2-натыйжа. *Чектүү сандагы $x \to a$ учурдагы чексиз кичине функциялардын көбөйтүндүсү ушул эле учурда чексиз кичине функцияны берет.*

3-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз кичине болсо, анда $C\,f(x)$ функциясы да чексиз кичине болот (мында C — турактуу сан).*

4-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз кичине болсо, ал эми $\varphi(x)$ чектелген функция болсо (б.а. $\forall x \Rightarrow |\varphi(x)| < C$), анда $f(x) \cdot \varphi(x)$ функциясы да чексиз кичине болот.*

2-э с к е р т ү ү. Функциянын пределинин аныктамасы менен чексиз кичине функциянын аныктамасын кошо эске алсак, анда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \varphi(x),$$

мында $\varphi(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз кичине.

3-э с к е р т ү ү. Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары $x \to a$ учурда чексиз кичине болушса жана $\varphi(x) \neq 0\ \forall x$, ошондой эле $\lim\limits_{x \to a} (f(x) / \varphi(x)) = l$ болсо, анда $l = 1$ болгондо $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары $x \to a$ учурда *эквиваленттүү* деп аталат, аны $x \to a$ учурда $f(x) \backsim \varphi(x)$ деп жазышат; $l = 0$ болгондо $f(x)$ функциясынын кичинелик даражасы $\varphi(x)$ функциясынын кичинелик даражасынан чоң деп айтышат жана аны $x \to a$ учурда $f(x) = 0\ (\varphi(x))$ деп жазышат; $l \neq 0$, $l \neq \infty$ болгондо $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын кичинелик даражалары бирдей тартипте деп аташат.

4-э с к е р т ү ү. a чекитинин кайсы бир $\dot{U}(a)$ аймагында $|f(x)| \leq C\,\varphi(x)$ аткарылса (мында C — турактуу сан), анда $x \to a$ учурда $f(x) = O\,(\varphi(x))$ деп жазышат.

5-э с к е р т ү ү. Эгерде $f(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз кичине болсо (мында $f(x) \neq 0$, $x \in \dot{U}_\delta(a)$), анда $\varphi(x) = 1/f(x)$ функциясы $x \to a$ учурда чексиз чоң функция болот, б.а.

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty.$$

г) Ф у н к ц и я н ы н п р е д е л д е р и м е н е н б о л г о н а м а л д а р. Эгерде $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары a чекитинде пределге ээ болсо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ жана } \lim_{x \to a} \varphi(x) = B, \text{ анда}$$

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)+\varphi(x)=A+B;$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)\varphi(x)=A\cdot B;$ $(\lim\limits_{x \to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x \to a} f(x);$

3) $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)/\varphi(x)\right)=\frac{A}{B}$, мында $B\neq 0$.

Көнүгүүлөр.

1. Жогоруда аталган касиеттерди чексиз кичине функциялардын касиеттерин пайдаланып далилдегиле.

2. Чексиз кичине функциялардын $x\to a-0$, $x\to a+0$, $x\to -\infty$, $x\to +\infty$, $x\to\infty$ учурдагы аныктамаларын келтиргиле.

3. $x\to a$ учурдагы функциянын чексиз чоң экендигинин аныктамасын "$\varepsilon-\delta$" аркылуу бергиле.

4. Эгерде $x\to a$ учурда $f(x)\sim\varphi(x)$ жана $\varphi(x)\sim\psi(x)$ болсо, анда $f(x)\sim\psi(x)$ экендигин көрсөткүлө.

5. Эгерде $x\to a$ учурда $f(x)=o\,\varphi(x)$ жана болсо, анда $f(x)=o\left(\psi(x)\right)$ экендигин көрсөткүлө.

6. $x\to a$ учурда $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$ болоорун көрсөткүлө.

7. Эгерде $x\to a$ учурда $f(x)\sim\varphi(x)$ жана $\varphi(x)=o\left(\psi(x)\right)$ болсо, анда $f(x)=o\left(\psi(x)\right)$ болорун көрсөткүлө.

4. Монотондуу функциялардын пределдери.

Монотондуу функция жөнүндөгү түшүнүк мурун айтылган. Эми монотондуу функциялардын бир жактуу пределдери дайыма болоорун далилдейбиз.

Теорема. *Эгерде f функциясы $[a,b]$ кесиндисинде аныкталып жана анда монотондуу болсо, анда ар бир $x_0\in(a,b)$ чекит үчүн ал функция оң жана сол пределдерге ээ, ал эми a же b чекиттеринин өзүндө өз ара туура келүүчү оң жана сол пределдерге ээ болот.*

○ Аныгыраак болсун үчүн f функциясынын $[a,b]$ кесиндиде өсүүчү учурун алалы. Андан ар бир $x_0\in[a,b]$ үчүн

$$x \in [a, x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

экенин жаза алабыз. Мындан f функциясы $[a, x_0)$ аралыгында жогору жагынан чектелген экенин көрөбүз. Ошондуктан чектелген көптүктүн жогорку анык учу жөнүндөгү теорема боюнча төмөндөгүнү алабыз:

$$\sup_{a \leqslant x < x_0} f(x) = M \leqslant f(x_0).$$

Же болбосо көптүктүн жогорку анык учу дегендин аныктамасы боюнча

а) $x \in [a, x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant M$,

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, x_0] : M - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$.

$x_0 - x_\varepsilon = \delta$ аркылуу белгилеп алсак, анда $\delta > 0$ (себеби $x_\varepsilon < x_0$). Ошондуктан

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x_\varepsilon) \leqslant f(x),$$

себеби f — өсүүчү функция. Акыркы үч формулалардан муну жаза алабыз:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$
$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in (M - \varepsilon, M].$$

Мунун өзү f тин сол предели бар дегендик:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = M.$$

Ошентип,

$$f(x_0 - 0) = \sup_{a \leqslant x < x_0} f(x).$$

Ушундай эле жол менен анын оң предели бар экенин:

$$f(x_0 + 0) = \inf_{x_0 < x \leqslant b} f(x)$$

далилдөөгө болот. ●

Натыйжа. Эгерде f функциясы $[a, b]$ кесиндисинде аныкталып жана анда өсүүчү болсо, анда

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Көнүгүүлөр.

1. $f(x)=\kappa x+\ell$. Бул сызыктуу функция R' аралыгында монотондуу экенин көрсөткүлө. Жогоруда далилденген теорема бул аралыкта да орун аларын далилдегиле (эгерде $\kappa>0$ учурда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ жана $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, эгерде $\kappa<0$ учурунда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ жана $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).

2. Эгерде f жана φ функциялары E көптүгүндө өсүүчү болушса, анда $f+\varphi$, $f-\varphi$, $f\cdot\varphi$ жана f/φ (мында $\varphi(x)\neq 0$, $x\in E$) монотондуу боло алышабы?

3. Квадраттык функция: $f(x)=ax^2+bx+c$ монотондуу эмес. Анын монотондуу бөлүктөрү барбы?

4. Монотондуу функциянын ар бир бөлүгү монотондуу болоорун далилдегиле.

5. Функциянын пределинин бар болушу жөнүндө Кошинин ченемдүүлүгү (шарты).

Сандык удаалаштыктардын пределдерин үйрөнүүдө Кошинин ченемдүүлүгүнө токтолуп өткөнбүз. Эми ошонун эле өзүн функциянын пределине колдонобуз.

Аныктама. *Эгерде*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$

$$x',\ x''\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

болсо, анда f функциясы $x=a$ чекитте Кошинин шартын канааттандырат деп айтабыз.

Теорема. *f функциясынын $x=a$ чекитинде пределге ээ болушу үчүн анын бул чекитте Кошинин шартын канааттандырышы зарыл жана жетиштүү.*

○ Зарылдыгы. Эгерде f тин предели бар десек, анда

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):\\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}.\end{cases}$$

Мындан $$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$
$$x',\ x''\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x')-A|+|A-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$
б.а. Кошинин шарты келип чыгат.

Ж е т и ш т ү ү ш а р т ы. Кошинин шарты канааттандырылсын дейли:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$
$$x',\ x''\in\ \overset{\circ}{U}_\delta(a)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Эми $U_\delta(a)$ көптүгүнөн $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ боло турган каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгын алалы. Кошинин шартында көрсөтүлгөн $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны үчүн
$$\lim x_n=a\Leftrightarrow\begin{cases}\exists N=N(\varepsilon):\\ N<n\Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta.\end{cases}$$
Мунун өзү
$$N<m,N<n\Rightarrow x_n\in\overset{\circ}{U}_\delta(a),x_m\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$$
дегенди көрсөтүп турат, б.а.
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\delta):$$
$$N<n,m\Rightarrow|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Ошентип, $\{f(x_n)\}$ сандык удаалаштыгы Кошинин шартын канааттандыра алат, демек, бул удаалаштык пределге ээ: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$ Эми бул предел a чекитине жыйналган $\{x_n\}$ удаалаштыктардан көз каранды болбоосун далилдөө гана калды. Чынында эле ошондой: эгерде, тескерисинче көз каранды болот деп эсептесек, анда
$$\{x_n\}\subset\overset{\circ}{U}_\delta(a):\lim_{n\to\infty}x_n=a\ \text{ жана }\ \{\tilde{x}_n\}\subset\overset{\circ}{U}_\delta(a):$$
$\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{x}_m=a$ удаалаштыктары үчүн

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \text{ жана } \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x}_n) = B$$

болоорун алабыз, мында $A \neq B$ (болбосо талаптанылган далилденген болот).

$$x_1, \widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{x}_2, \ldots, x_n, \widetilde{x}_n, \ldots$$

удаалаштыгын түзөлү, анын к-мүчөсүн t_κ деп белгилеп алалы. Мында $\lim\limits_{\kappa\to\infty} t_\kappa = a$ жана $\kappa \in \mathbb{N} \Rightarrow t_\kappa \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ болгондуктан $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_\kappa) = C$ дегенди алабыз. Бул жерден биз $\{f(x_n)\}$ жана $\{f(\widetilde{x}_n)\}$ удалаштыктары $\{f(t_\kappa)\}$ удаалаштыгындагы камтылган удаалаштыктар болушарын эске алсак, анда $A=B$ жана $A=C$ демек, $A=B=C$ барабардыгына келебиз, демек $A=B$. ●

Көнүгүүлөр.

1. Ар кандай функция берилген чекитте бирден ашык пределге ээ болбоосун далилдегиле.

2. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ болсо, анда $\exists\delta > 0 : \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ көптүгүндө f функциясы чектелген функция болот.

3. Функциянын пределинин бар болушу жөнүндөгү Кошинин ченемдүүлүгүн $a-0, a+0, -\infty, +\infty$ чекиттеринде да орун алаарын далилдегиле.

4. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ болсо, анда $f(a+0)$ жана $f(a-0)$ пределдери да бар жана $f(a-0) = f(a+0)$ экендигин далилдегиле.

5. Эгерде $f(a-0)$ жана $f(a+0)$ бар болушса, ошондой эле $f(a-0) = f(a+0)$ болсо, анда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$ экендигин далилдегиле.

6. $x \to -\infty$ жана $x \to +\infty$ учурдагы функциянын пределинин аныктамасын бергиле.

§ 3. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ФУНКЦИЯЛАР

1. Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү.

1-аныктама. *Эгерде f функциясы $x=a$ чекитинин кайсы бир аймагында (ошонун ичинде a чекитинин өзүндө да сөзсүз түрдө) аныкталып жана*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \tag{1}$$

болсо, анда бул функция $x=a$ чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

Мына ошентип, $f(x)$ тин $x=a$ чекитинде үзгүлтүксүз болушу үчүн төмөндөгүдөй шарттар аткарылышы керек:

а) $f(x)$ функциясы a чекитинин кайсы бир аймагында аныкталышы керек, б.а. $\exists\delta=\delta(a): \overset{\circ}{U}_\delta(a)\subset D(f)$;

б) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $(A<\infty)$;

в) $A=f(a)$.

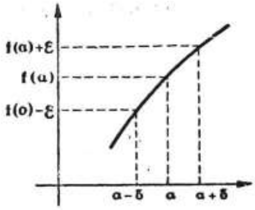
Өткөн параграфта келтирилген функциянын пределинин аныктамаларына ылайык функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү аныктаманы кеңенирээк төмөндөгүчө келтирели.

2-аныктама. *Эгерде f функциясы $x=a$ чекитинин кайсы бир аймагында (ошонун ичинде a чекитинин өзүндө да сөзсүз түрдө) аныкталып жана*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$
$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

же

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$
$$x\in U_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(f(a))$$



11-чийме

же $\forall\{x_n\} \subset D(f): \lim\limits_{x \to +\infty} x_n =$

$$= a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

болсо, анда f функциясы *a чекитине үзгүлтүксүз деп аталат.*

3-аныктама. Эгерде f функциясы a чекитинин $U(a)$ аймагында аныкталып жана анда жогоруда аталган шарт аткарылбаса, анда ал функция a чекитинде үзгүлтүктүү деп аталат.

Функциянын a чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүнүн түз аныктамасын келтирүү да пайдалуу.

4-аныктама. *f функциясы a чекиттин $U(a)$ аймагында аныкталсын дейли. Эгерде*

$$\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon = \varepsilon(\delta)\ \exists x_\delta \in U(a):$$
$$|x_\delta - a| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - f(a)| \geqslant \varepsilon$$

болсо, анда f функциясын a чекитинде үзгүлтүкт_ү деп аташат.

Функциянын үзгүлтүксүздүгүн изилдөөдө практикалык мааниси чоң болгон анын дагы бир аныктамасына токтолбой кетүүгө болбойт.

Аргументтин $x-a$ айырмасын Δx аркылуу, ал эми функциянын маанилеринин $f(x)-f(a)$ айырмасын Δy аркылуу белгилеп алалы, биринчисин — аргументтин a чекиттеги өсүндүсү, ал эми экинчисин — бул чекиттеги функциянын өсүндүсү деп аташат. Мына ошентип,

$$\Delta x = x - a,\ \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

5-аныктама. *Эгерде f функциясы a чекитинин $U(a)$ аймагында (a чекитинде да сөзсүз түрдө) аныкталган болсо жана $x \in U(a)$ үчүн*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon):$$
$$|x - a| = |\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(a) + \Delta x) - f(a)| = |\Delta y| < \varepsilon$$

болсо, башкача айтканда, чексиз кичине функциянын аныктамасын эске алганда,

$$\lim_{\Delta x \to a} \Delta y = 0$$

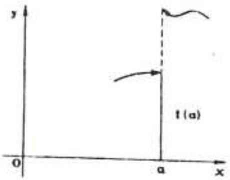
шарты аткарылса, анда f функциясы a чекитте үзгүлтүксүз деп аталат.

Ошентип, функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн бул аныктамасы — аргументтин чексиз кичине өсүндүсүнө функциянын каралып жаткан чекиттеги чексиз кичине өсүндүсү туура келсе — деген шарттын аткарылышын талап кылат.

Функциянын сол жана оң пределинин аныктамасына ылайык, анын чекиттеги сол жана оң жактан үзгүлтүксүздүгүнүн аныктамалары да берилиши күтүлөт.

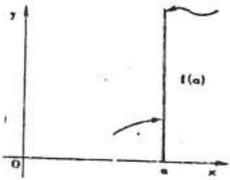
6-аныктама. *Эгерде f функциясы $(a-\delta,\ a]$ аралыгында аныкталып жана* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, б.а. $f(a-0) = f(a)$ *болсо, анда бул функцияны каралып жаткан чекитте сол жагынан үзгүлтүксүз деп айтышат* (12-чийме). *Ушуга эле окшош, эгерде f функциясы $[a,\ a+\delta)$ аралыгында аныкталып жана $f(a+0) = f(a)$ болсо, анда f ти a да оң жагынан үзгүлтүксүз деп айтышат* (13-чийме).

f функциясы *a* да сол жагынан үзгүлтүксүз.



12-чийме

f функциясы *a* да оң жагынан үзгүлтүксүз.



13-чийме

Ушуга байланыштуу *f* тин үзгүлтүксүздүгүнүн дагы бир, практикада көп колдонулушка ээ болгон, аныктамасын келтирели.

7-аныктама. *Эгерде f функциясы үчүн*

$$f(a-0)=f(a)=f(a+0)$$

барабардыгы аткарылса, f ти бул чекитте үзгүлтүксүз деп аташат.

1-мисал. $y=x^n(n=0,\ 1,\ ...$ **функцияларынын a чекитинде үзгүлтүксүз болорун далилдегиле, мында $a\in\mathbb{R}^1$ — каалагандай алынган чекит.**

Δ $n=1$ учурда $y=x$ функциясын алабыз. Функциянын пределинин аныктамасы боюнча $x\to a\Rightarrow y\to a$, б.а. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$ экенин алабыз, демек, бул функция каалаган $a\in\mathbb{R}^1$ чекитте үзгүлтүксүз.

$n=2$ учурда $y=x^2=x\cdot x$ функциясы үчүн функциянын пределдеринин касиеттеринин негизинде $\lim\limits_{x\to a}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to a}(x\cdot x)=a^2$ экендигин алабыз, башкача айтканда, бул функция да $\mathbb{R}^1$ дин каалаган чекитинде үзгүлтүксүз боло аларын көрөбүз.

Эгерде $y=x^n$ функциясы a да үзгүлтүксүз болсо, анда

$$\lim_{x\to a}x^{n+1}=(\lim_{x\to a}x^n)(\lim_{x\to a}x)=a^n\cdot a=a^{n+1}$$

экенин алабыз, демек, индукция боюнча талап кылынган далилденди. ▲

1-натыйжа. $y=c$ функциясы $\mathbb{R}^1$ де үзгүлтүксүз (эмне үчүн?).

2-мисал. Алгебралык көп мүчө

$$P(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+...+c_n,$$

мында $c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n$ — берилген сандар, n — натуралдык сан) $\mathbb{R}^1$ дин каалаган чекитинде үзгүлтүксүз. Чынында да, анын каалаган мүчөсүн алалы: c_kx^{n-k}. Бул мүчө үзгүлтүксүз, себеби c_k — турактуу функция — үзгүлтүксүз, ошондой эле

1-мисалда көрсөтүлгөндөй, $x^{n-\kappa}$ функциясы да үзгүлтүксүз, демек,

$$\lim_{x\to a}(c_\kappa x^{n-\kappa}) = c_\kappa a^{n-\kappa}$$

болоорун алабыз. Ошондой эле

$$\lim_{x\to a} P(x) = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \ldots + c_n = P(a).$$

3-м и с а л. Эгерде

$$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n}{d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_m}$$

рационалдык функциясы берилсе (мында c_κ, d_κ — берилген сандар; n, m — натуралдык сандар), анда $q(x) \neq 0$ болгон бардык x тин маанилери үчүн ал үзгүлтүксүз болот, себеби бул учурда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{c_0 a^n + \ldots + c_n}{d_0 a^m + \ldots + d_m} = \frac{P(a)}{q(a)} = f(a).$$

4-м и с а л. $f(x) = \sin x$ функциясы бардык $x \in R^1$ үчүн үзгүлтүксүз экендигин далилдейли.

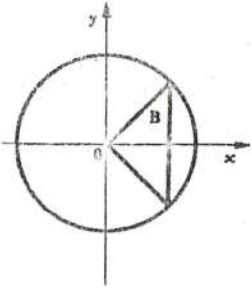
14-чиймеде көрүнүп тургандай, эгерде $\left|\frac{x}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$ учурду алсак, $\overset{\smile}{AC} = 2|x|$ ке барабар болгон жаанын узундугу $2\cdot|\sin x|$ ке барабар болгон хорданы камтып турат: $2|\sin x| < 2|x|$, мындан $|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\sin x| < |x|$ экендигин алабыз. Эгерде $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$ болсо, анда $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1 \geqslant \sin x$ болоорун эске алып

$$|\sin(x+\Delta x) - \sin x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}\cdot 1 = |\Delta x|$$

болорун алабыз. Демек, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Мунун өзү, функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн аныктамасына туура келет.



14-чийме

5-м и с а л. $f(x) = cos x$ функциясы бардык $x \in R^1$ үчүн үзгүлтүксүз.

$$|cos(x + \Delta x) - cos x| =$$
$$= \left|2sin\frac{\Delta x}{2} \cdot sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot 1 = |\Delta x| \to 0, \Delta x \to 0,$$

болгонунун өзү айтылган нерсени ырастап турат.

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде f функциясы $x = a$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал бул чекитте пределге ээ боло алабы?

2. Эгерде f функциясы $x = a$ чекитте пределге ээ болсо анда ал бул чекитте үзгүлтүксүз боло алабы?

*3. Эгерде f жана φ функциялары a чекитте сол (оң) жагынан үзгүлтүксүз болушса, анда алардын суммасы, көбөйтүндүсү бул чекитте үзгүлтүксүз болушабы?

2. Үзгүлтүктүү чекиттер.

Жогоруда биз функциянын чекиттеги предели жана үзгүлтүксүздүгү жөнүндө сөз кылдык. Биринчи учурда функцияны каралып жаткан чекиттин кайсы бир $\overset{\circ}{U}(a)$ аймагында аныкталган деп, экинчисинде $U(a)$ аймагында аныкталган деп алганбыз, мында $\overset{\circ}{U}(a)$ жана $U(a)$ аймактарына чекитинин өзүн сөзсүз түрдө камтыбаганы жана сөзсүз түрдө камтыганы менен айырмаланышат. Бул пунктта f функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз эмес, б.а. же бул чекитте функция аныкталган эмес же аныкталса да, эч болбогондо төмөндөгү шарттардын бирөө аткарылган эмес:

а) $a \in D(f)$;

б) f тин чектүү пределн бар: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$;

в) $A=f(a)$.

Эгерде f функциясы a чекитте үзгүлтүксүз болсо жана бул чекитте анын сол жана оң чектүү пределдери бар болсо, б.а. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a-0)$ жана $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a+0)$, анда a чекитин биринчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекит деп айтабыз.

Бул учурда $f(a+0)-f(a-0)$ айырмасын функциянын a чекитиндеги үзүндүсүнүн чоңдугу деп айтышат.

Эгерде $f(a+0)=f(a-0)$ болсо, анда a чекитин функциянын калыптануучу үзгүлтүктүү чекити дешет. Бул учурда

$$f(a)=f(a+0)=f(a-0)=A,$$

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a, \\ A, & x=a \end{cases}$$

деген үзгүлтүксүздүктү камсыз кыла алабыз. Мында функциянын a чекиттеги мааниси A "жасалма түрдө аныкталды".

Эгерде $x=a$ чекити f тин үзгүлтүктүү чекити болуп жана ал биринчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекит боло албаса, анда аны функциянын экинчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекити дешет. Мындай чекитте берилген функция үчүн же бир жактуу пределдердин эч болбогондо бирөөсү болбойт, же ал чектүү эмес.

Мисалы, $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$ функциясы үчүн $x=0$ чекити биринчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекит. Ошондуктан бул чекитте функциянын маанисин жасалма аныктап,

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

деген үзгүлтүксүз функцияны алабыз, себеби

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Ал эми $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функциясы үчүн $x=0$ чекитти — *экинчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекит* деп айтабыз.

1-теорема. *Эгерде f функциясы $[a, b]$ кесиндисинде аныкталып жана анда монотондуу болсо, анда бул кесиндинин бардык ички чекиттеринде функция биринчи түрдөгү гана үзгүлтүктүү чекиттерге ээ боло алат.*

○ $x_0 \in (a, b)$ — эркибизче алынган чекит болсун. 1 — 2-параграфта айтылгандар боюнча f функциясы x_0 чекитте сол жана оң чектүү пределдерге ээ. Ачыгыраак айтканда, эгерде f – өсүүчү функция болсо, анда

$$f(x_0-0)\leq f(x_0)\leq f(x_0+0).$$

Мында $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ болсо, анда f бул чекиттеги үзгүлтүксүз, ал эми $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ учурда — x_0 чекити f тин биринчи түрдөгү үзгүлтүктүү чекити гана боло алат.

Кемүүчү функция үчүн деле ушундай эле талкуулоо орун алат. ●

Эми татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндө төмөнкү теореманы далилдей алабыз.

2-теорема. *Эгерде f функциясы a чекитте үзгүлтүксүз болсо, ал эми F функциясы $f(a)$ чекитте үзгүлтүксүз болсо, анда Φ $\varphi(x)=F\big((f(x)\big)$ татаал функциясы a чекитте үзгүлтүксүз болот.*

○ F функциясынын $f(a)$ чекитте үзгүлтүксүздүгүнөн

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon):$$
$$f(x)\in U_\delta\big(f(a)\big)\Rightarrow F\big(f(x)\big)\in U_\varepsilon\big(f(a)\big),$$

ал эми f функциясынын a чекитте үзгүлтүксүздүгүнөн көрсөтүлгөн $\delta(\varepsilon)$ саны үчүн

$$\exists\sigma=\sigma(\delta)=\sigma\big(\delta(\varepsilon)\big)=\sigma(\varepsilon):$$
$$x\in U_\sigma(a)\Rightarrow f(x)\in U_\delta\big(f(a)\big)$$

болорун алабыз.

Мындан

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma = \sigma(\varepsilon) :$$

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow F\big(f(x)\big) \in U_\varepsilon\Big(F\big(f(a)\big)\Big).$$

Үзгүлтүксүз функциянын аныктамасы боюнча талап кылынганды алабыз. ●

3. Үзгүлтүксүз функциялардын локалдык касиеттери

1-касиет. *Эгерде f функциясы a чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда ал a чекитинин кайсы бир аймагында чектүү маанилерге ээ болот, б. а. кайсы бир $c>0$ жана $\delta > 0$ сандары табылып жана*

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| \le c$$

болот. Мында c жана δ сандары, жалпысынан алганда, a чекитине ылайык табылышат.

Далилдөөсү пределдердин касиетинен келип чыгат.

2-касиет. *Эгерде f функциясы a чекитте үзгүлтүксүз болсо жана $f(a) \neq 0$ шарты аткарылса, анда a чекитинин кайсы бир аймагында $f(a)$ кандай белгиге ээ болсо, f тин ошол аймактагы бардык маанилери да ошол белгиге ээ болот, б. а.*

$$\exists \delta = \delta(a) > 0 :$$

$$x \in U_\delta(a) \Rightarrow sgn f(x) = sgn f(a).$$

Далилдөөсү пределдердин касиетинен келип чыгат.

3-касиет. *Эгерде f жана φ функциялары a чекитте үзгүлтүксүз болушса, анда бул чекитте $f + \varphi$, $f \cdot \varphi$, f / φ (мында $\varphi(a) \neq 0$) функциялары да үзгүлтүксүз болушат.*

Далилдөөсү функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн аныктамасынан жана пределдердин касиетинен келип чыгат.

Көнүгүүлөр.

1. f функциясынын a чекитте үзгүлтүксүз болушу үчүн анын бул чекитте бир эле убакта сол жагынан да, оң жагынан да үзгүлтүксүз болушу зарыл жана жетиштүү болорун далилдегиле.

2. Келтирилген 2-теореманы Гейненин аныктамасы боюнча далилдегиле.

3. Келтирилген 3-касиетти $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функциялары үчүн теореманы келтиргиле жана аны далилдегиле.

4. Эгерде f функциясы X көптүгүндө камтылган ар бир $[\alpha, \beta]$ кесинди үчүн үзгүлтүксүз болсо, анда f бүткүл X де үзгүлтүксүз болоорун далилдегиле.

4. Үзгүлтүксүз функциялардын кесиндидеги касиеттери.

Жогоруда биз функциянын бир чекиттеги үзгүлтүксүздүгү жөнүндө айттык. Эми анын бүтүндөй кесиндидеги үзгүлтүксүздүгү жөнүндө сөз кылабыз.

Аныктама. *Эгерде f функциясы берилген (a, b) аралыгынын ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болуп жана a чекитинде оң жагынан үзгүлтүксүз, ал эми b чекитинде сол жагынан үзгүлтүксүз болсо, анда аны $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз деп аташат.*

Кесиндидеги үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери төмөнкүлөр:

1°) Кесиндидеги үзгүлтүксүз функциянын чектүүлүгү.

Вейерштрасстын биринчи теоремасы. *Эгерде f функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, анда ал бул кесиндиде чектүү маанилерине ээ, б.а.*

$$\exists c > 0 : \quad x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| \le c. \qquad (2)$$

○ Далилдөөнү тескери метод менен жүргүзөбүз. f функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болуп, анда чектелбеген дейли. Бул учурда

$$\exists \{x_n\} \subset [a, b] : f(x_n) > n, \ (n = 0, 1, \ldots). \qquad (3)$$

$[a, b]$ кесиндиси чектелген көптүк болгондуктан, бул удаалаштык чектелген. Ошондуктан Больцано-Вейерштрасстын теоремасы боюнча ага камтылган жыйналуучу удаалаштык болгон $\left\{x_{n_\kappa}\right\} \subset \left\{x_n\right\}$ удаалаштыгын бөлүп алууга болот:

$$\lim_{\kappa\to\infty} x_{n_\kappa} = x_0,$$

себеби $\kappa \in N \Rightarrow a \leqslant x_{n_\kappa} \leqslant b,\ x_0 \in [a,\ b]$. Ал эми f функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, демек, x_0 чекитинде да үзгүлтүксүз, андыктан

$$\lim_{\kappa\to\infty} f\left(x_{n_\kappa}\right) = f(x_0). \tag{4}$$

Экинчи жагынан

$$x_{n_\kappa} \in [a,\ b] \Rightarrow f\left(x_{n_\kappa}\right) > n_\kappa \ (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots),$$

б.а. $\lim\limits_{\kappa\to\infty} f\left(x_{n_\kappa}\right) = +\infty$. Бул (4) формулага карама-каршы келет, себеби x_0 чекитинде f функциясы үзгүлтүксүз — андыктан $f(x_0)$ — чектүү сан. Ошондуктан (3) шарттын орун алышы мүмкүн эмес, б.а. (2) гана орун ала алат. ●

2^0) Функциянын маанилеринин көптүгүнүн анык учтарына жетишүү жөнүндөгү теорема.

Вейерштрасстын экинчи теоремасы. *Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, анда анын маанилеринин көптүгү өзүнүн анык төмөнкү жана анык жогорку учтарын да камтыган болот, б.а.*

$$\exists\xi \in [a,\ b] : f(\xi) = \sup_{x\in[a,\ b]} f(x), \tag{5}$$

$$\exists\eta \in [a,\ b] : f(\eta) = \inf_{x\in[a,\ b]} f(x), \tag{6}$$

○ Кесиндиде үзгүлтүксүз функция Вейерштрасстын биринчи теоремасы боюнча чектүү маанилерге ээ, б.а. анын маанилеринин көптүгү чектелген, демек, ал көптүктүн жогорку жана төмөнкү учтары бар.

Жогорку учун карайлы. (5) айтылышты далилдөө үчүн

$$M = \sup_{x\in[a,\ b]} f(x)$$

деп белгилеп алсак, көптүктүн анык жогорку учунун аныктамасы боюнча

$$x \in [a,\ b] \Rightarrow f(x) \leqslant M,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in [a,\ b] : f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$$

дегенди жазабыз. Мында $\varepsilon = \frac{1}{n}$ деп алсак, анда $\{y_n\} = \{x_{1/n}\}$ үчүн

$$y_n \in [a,\ b] \Rightarrow f(y_n) \leqslant M,$$
$$f(y_n) > M - \frac{1}{n},$$

б. а.

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leqslant M \tag{7}$$

экенине келебиз. Мындан

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = M.$$

$\{y_n\} \subset [a,\ b]$ болгондуктан, андан камтылган жыйналуучу удаалаштыкты бөлүп ала алабыз, аны $\{y_{n_\kappa}\}$ деп белгилеп алсак, (7) формула

$$M - \frac{1}{n_\kappa} < f(y_{n_\kappa}) \leqslant M$$

түргө келет. Мындан $\lim\limits_{\kappa\to\infty} y_{n_\kappa} = \xi$ деп алсак, анда

$$M \leqslant \lim_{\kappa\to\infty} f(y_{n_\kappa}) \leqslant M$$

демек,

$$\lim_{\kappa\to\infty} f(y_{n_\kappa}) = M = f(\xi).$$

(б) айтылышты да ушул эле жол менен далилдей алабыз.

3°) Үзгүлтүксүз функциянын нөлдөрү жөнүндөгү теорема.

Кошинин теоремасы. *Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп жана ал кесиндинин учтарында эки башка белгилердеги мааниге ээ болсо, мисалы, $f(a) > 0$,*

$f(b) < 0$ болсо, анда $[a, b]$ кесиндисинде f функциясы нөлгө барабар боло турган эч болбогондо бир чекит табылат, б.а.

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = 0.$$

○ Берилген $[a, b]$ кесиндини тең экиге бөлөлү. Анын ортосун c десек, эгерде $f(c) = 0$ болуп калса, анда теорема далилденген болот. Ал эми эгерде $f(c) \neq 0$ болсо, анда теореманын шарты боюнча $[a, c]$ жана $[c, b]$ кесиндилеринин биреөндө f функциясы $f(a) > 0$, $f(c) < 0$ же $f(c) > 0$, $f(b) < 0$ шартты канааттандырат. Ошол кесиндини $[a_1, b_1] = \Delta_1$ деп белгилеп алалы. c_1 чекити Δ_1 кесиндисинин ортосу болсун деп алалы. Жогоркудай эле төмөнкү эки учур болушу мүмкүн:

1) $f(c_1) = 0$ же 2) $f(c_1) \neq 0$.

Биринчи учурда теорема далилденген болот. Экинчи учурду алсак, анда $[a_1, c_1]$ жана $[c_1, b_1]$ эки кесиндилердин биреөсүнүн четки чекиттеринде f эки белгидеги мааниге ээ болот:

$f(a_1) > 0$, $f(c_1) < 0$ же $f(c_1) > 0$, $f(b_1) < 0$. Ал кесиндини $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ деп белгилеп алалы.

Ушул жол менен кесиндини бөлүп отурсак, аягында буга келебиз:

1) n жолу кайталангандан кийин же $f(c_n) = 0$,

$c_n = (b-a)/2^{n+1}$ дегенге келебиз. Бул учурда теорема далилденген болмок.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ үчүн $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$ барабарсыздыгы аткарылгандай $\{\Delta_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ кесиндилердин удаалаштыгын алабыз:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Delta_{n+1} \subset \Delta_n$$

жана $n \to \infty$ учурда

$$b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0 \tag{8}$$

болгондуктан, бул удаалаштык — улам камтылган кесиндилердин удаалаштыгы (§4, 2-п. кара).

Андыктан Кантордун теоремасы боюнча бул удаалаштыктын ар бирине тийиштү болгон d чекити табылат, б.а.

$$\exists d : \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow d \in [a_n, b_n] \subset [a, b].$$

Эми

$$f(d) = 0$$

болоруна ишенүү кыйын эмес. Чынында да, же $f(d) > 0$, же $f(d) < 0$ болоорун алабыз. $f(d) > 0$ учурун көрөлү. f функциясы d чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, анын белгини сактоо касиети (3-п. кара) боюнча

$$\exists \delta = \delta(d) > 0 :$$
$$x \in U_\delta(d) \Rightarrow f(x) > 0$$

аткарылышына келебиз. Бирок, (8) формуладан көрүнүп тургандай

$$n \to \infty \Rightarrow b_n - a_n \to 0,$$

демек,

$$\exists N = N(\delta) :$$
$$N < n \Rightarrow b_n - a_n < \delta.$$

Мындан

$$N < n \Rightarrow \Delta_n \in U_\delta(d),$$

б.а. $n>N$ учурда $[a_n, b_n]$ кесиндисинин ар бир чекитинде f функциясы оң мааниге ээ. Мунун өзү $[a_n, b_n]$ кесиндисинин ичинде f функциясы эки маанидеги белгиде болот дегенге карама-каршы келет. Демек, $f(d) = 0$ учуру гана мүмкүн.●

4°) Үзгүлтүксүз функциянын ортолук маанилери жөнүндөгү теорема.

Кошинин теоремасы. *Эгерде f функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп жана бул кесиндинин эки учунда бирдей эмес маанилерге ээ болсо:*

$$f(a) = A,\ f(b) = B,\ (A \neq B),$$

анда $[A, B]$ аралыгында жаткан ар бир C саны үчүн $[a, b]$ кесиндисинен ξ чекити табылат да, ал үчүн $f(\xi) = C$ болот.
○ $A < B$ учурун карайлы, демек, $A < C < B$ барабарсыздыгындагы C санын карап жатабыз.

Бизге

$$\exists\xi\in[a,\ b]:\ f(\xi)=C$$

орун аларын далилдөө керек. Ал үчүн $\varphi(x)=f(x)-C$ деген функцияны түзүп жана бул функция мындан мурунку теореманын шартын канааттандырарын көрөбүз. Чынында эле, $\varphi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз жана анын эки учунда эки башка белгидеги мааниге ээ:

$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0;\quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

Демек, a жана b сандарынын арасында жаткан ξ чекитин табууга болот жана ал үчүн $\varphi(\xi)=0$ барабардыгы аткарылат, б.а.

$$f(\xi)-C=0 \text{ же } f(\xi)=C.$$

Талап кылынган далилденди.●

Натыйжа. *Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, демек,* $m=\inf\limits_{x\in[a,\ b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,\ b]} f(x)$, *анда f функциясынын $[a,\ b]$ га туура келүүчү маанилеринин көптүгү $[m,\ M]$ кесинди менен дал келет.*

5. Үзгүлтүксүз функциянын тескери функциясынын бар болушу жана анын үзгүлтүксүздүгү.

7-теорема. *Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болуп жана анда анык өсүүчү (анык кемүүчү) болсо, анда $\left[f(a),\ f(b)\right]=[A,\ B]$ кесиндиде f ке тескери $x=g(y)$ функциясы бар жана ал анда үзгүлтүксүз да, анык өсүүчү да функция болот.*

○ *а) Тескери функциянын бар болушу.* $A=f(a)$ жана $B=f(b)$ сандарын $A=\inf\limits_{x\in[a,\ b]} f(x)$ жана $B=\sup\limits_{x\in[a,\ b]} f(x)$ аркылуу жазууга болот, себеби $[a,\ b]$ кесиндиде берилген функция f — анык өсүүчү функция, б.а.

$$x\in[a,\ b]\Rightarrow A\leqslant f(x)\leqslant B.$$

Ал эми f функциясы $[a, b]$ де үзгүлтүксүз болгондуктан, $[a, b] = D(f)$ жана $[A, B] = E(f)$, б.а. f тин аныкталуу областы $[a, b]$ болсо, $[A, B]$ кесиндиси f тин маанилеринин көптүгү.

Тескери функциянын аныктамасы боюнча (§ 1. 7-п. кара) ар бир $y_0 \in [A, B]$ саны үчүн

$$f(x) = y_0 \tag{9}$$

теңдемеси жалгыз гана $x = x_0 \in [a, b]$ чыгарылышка ээ болсо, анда $[a, b]$ де тескери функциянын бар экендиги далилденген болот. (9) теңдеменин эч болбогондо бир чыгарылышы бар экендиги 6-теоремадан келип чыгат. Эми бизге анын чыгарылышы жалгыз экендигин далилдөө гана калды. Ал үчүн, (9) теңдеменин бирден ашык чыгарылыштары бар деп эсептейли. Алардын ичинен каалагандай эки чыгарылышын алалы: $x = x_0$ жана $x = \bar{x}_0$ мында, албетте $x_0 \neq \bar{x}_0$ учурун карайбыз (болбосо талаптанган далилденген болот). Бул учурда $f(x_0) = y_0$ жана $f(\bar{x}_0) = y_0$, $x_0, \bar{x}_0 \in [a, b]$. Мүмкүн болгон $x_0 < \bar{x}_0$ жана $x_0 > \bar{x}_0$ эки учурдун, мисалы, биринчисин алалы: $x_0 < \bar{x}_0$. f функциясы $[a, b]$ де анык өсүүчү болгондуктан $x_0 < \bar{x}_0 \Rightarrow f(x_0) < f(\bar{x}_0)$ туюнтмасын жаза алабыз. Бирок, $f(x_0) = f(\bar{x}_0) = y_0$ барабардыгы ага карама-каршылыкты туудуруп турат, демек, $x_0 = \bar{x}_0$. Ушуну менен тескери функциянын бар экендиги далилденди, б.а. $[A, B]$ кесиндиде $x = f^{-1}(y) = g(y)$ функциясы аныкталган жана ал f ке тескери функция, андан башка дагы $D(g) = [A, B]$ жана

$$\begin{aligned} f(g(y)) &= y, \quad y \in [A, B], \\ g(f(x)) &= x, \quad x \in [a, b] \end{aligned} \tag{10}$$

формулалары орун аларын көрөбүз.

б) Тескери функциянын монотондуулугу. Эми $g(y)$ функциясынын $[A, B]$ кесиндиде анык өсүүчү (кемүүчү) боло тургандыгын, б.а.

$$y_1 < y_2 \left(y_1,\ y_2 \in [A,\ B]\right) \Rightarrow g(y_1) < g(y_2) \qquad (11)$$

экендигин далилдейбиз.

Эгерде андай болбойт деп көрсөк, б.а. (11) барабарсыздык аткарылбасын дейли:

$$\exists \bar{y}_1,\ \bar{y}_2 \in [A,\ B] : \bar{y}_1 < \bar{y}_2 \Rightarrow g(\bar{y}_1) \geqslant g(\bar{y}_2). \qquad (12)$$

Мындан, $\bar{x}_1 = g(\bar{y}_1)$, $\bar{x}_2 = g(\bar{y}_2)$ деп белгилеп алсак, анда $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2 \in [a,\ b]$ жана (12) боюнча $\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_2$. Ошондой эле (10) формуланын негизинде

$$f(\bar{x}_1) = \bar{y}_1,\ f(\bar{x}_2) = \bar{y}_2$$

болорун алабыз. Эми биз f тин анык өсүүчү функция экенин эске алсак, анда

$$\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_2 \Rightarrow f(\bar{x}_1) \geqslant f(\bar{x}_2)$$

болоорун, б.а. $\bar{y}_1 \geqslant \bar{y}_2$ барабарсыздыгына келебиз, ал эми бул биздин $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$ деген болжолдообузга карама-каршы келет. Ошондуктан, (12) формуладагы айтылыш туура эмес, демек (11) туура.

в) Тескери функциянын үзгүлтүксүздүгү. Биз азыр $(A,\ B)$ аралыгынан каалаган y_0 чекитин алып, анда g функциясы үзгүлтүксүз болоорун далилдейбиз. Ал үчүн

$$g(y_0 - 0) = g(y_0) = g(y_0 + 0) \qquad (13)$$

барабардыгынын орун алышын далилдөө жетиштүү. Монотондуу функциялардын пределдери жөнүндө сөз болгондо (8-п. кара), биз

$$g(y_0 - 0) \leqslant g(y_0) \leqslant g(y_0 + 0) \qquad (14)$$

барабарсыздыгы орун аларын белгилегенбиз. Ошондуктан (13) туюнтмалардын ичинен эч болбогондо бирөөсү аткарылбай калсын деп көрөлү, мисалы, $g(y_0 - 0) \neq g(y_0)$. Анда

$$g(y_0 - 0) < g(y_0) \qquad (15)$$

болушу гана мүмкүн. Мындан, $g(y_0 - 0) = \sup\limits_{A < y < y_0} g(y)$ экенин эске алсак, анда $A \leqslant g(y) \leqslant g(y_0 - 0)$ болоорун, ал эми

$$y \in [y_0,\ B] \Rightarrow g(y_0) \leqslant g(y) \leqslant B$$

экенин көрүп (15) формуладан

8— 1238

$$\Delta = \big(g(y_0 - 0),\ g(y_0)\big) \notin [A,\ B]$$

келип келип чыгарын алабыз. Бул болсо $[a,\ b]$ кесиндинин бардык чекиттери, анын ичинде Δ интервалы да, $E(g)$ көптүгүндө жатат дегенге карама-каршы келет. Демек, (13) формуланын биринчиси далилденди. Экинчиси да ошондой жол менен далилденет. ○

Көнүгүүлөр.

1. Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда $\exists x_0 \in [a,\ b] : f(x_0) = \max\limits_{x \in [a,\ b]} f(x)$ экендигин далилдегиле.

2. Ушул эле айтылышы төмөнкү аралыктарда орун алабы:

1) $[a,\ b)$, 2) $[a,\ b) \cup [c,\ d]$, 3) $a < b \leqslant c < d$?

3. Вейерштрасстын биринчи теоремасы төмөндөгү учурларда орун алабы:

1) $[a,\ b)$, 2) $[a,\ b) \cup [c,\ d]$, 3) $(a,\ b)$?

4. Вейерштрасстын экинчи теоремасы төмөнкү учурларда орун алабы:

1) $[a,\ b)$, 2) $(a,\ b)$, 3) $(-\infty,\ \infty)$?

5. Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде камтылган ар бир $[\alpha,\ \beta]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, анда f функциясы бүткүл $[a,\ b]$ да үзгүлтүксүз болоорун далилдегиле.

6. Так даражалуу ар кандай полином эч болбогондо бир чекитте нөлгө барабар болоорун далилдегиле.

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРДЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

1. Полиномдор жана рационалдык функциялар.

n-даражадагы полиномду алалы,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Бул функциянын аныкталуу областы $R^1 = (-\infty, \infty)$, б.а. $P(P_n) = R^1$ жана ал R^1 областында үзгүлтүксүз экенин далилдейли. Чынында эле, $n = 0$ учурунда $P_0(x) = a_0$ турактуу санды алабыз, ал үзгүлтүксүз функция, себеби ар кандай $x \in R^1$ үчүн $\Delta y = 0$. $n = 1$ учурунда $P_1(x) = a_0 + a_1 x$ деген (сызыктуу) функцияны алабыз. Мында $y = x$ үчүн $\Delta y = \Delta x$ болгондуктан, каралып жаткан $P_1(x)$ функция R^1де үзгүлтүксүз, себеби — a_1 турактуу сан — үзгүлтүксүз, эки үзгүлтүксүз функциянын көбөйтүндүсү үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз функциялардын (алгебралык) суммасы үзгүлтүксүз.

Ошондой эле $a_k x^{n-k}$ — үзгүлтүксүз функция, анын аныкталуу областы — R^1, мында $k = 0, 1, \ldots, n$. Демек, $P_n(x)$ функциясы R^1 де үзгүлтүксүз (ал — үзгүлтүксүз функциялардын суммасы).

Эми биз n жана m даражалардагы $P_n(x)$ жана $P_m(x)$ полиномдорун алалы, алар азыр эле далилдегенибиздей, R^1 де үзгүлтүксүз функциялар. Алардын жардамы менен $R(x) = P_n(x)/P_m(x)$ рационалдык функцияны жаратылы. Эгерде $P_m(x) \neq 0$ болсо, анда үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери боюнча, $R(x)$ функциясы бул чекитте үзгүлтүксүз болот. Ошондой эле $P_m(x)$ полиномунуй нөлдөрүнөн башка бардык чекиттерде $R(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болоорун көрүү кыйындыкка турбайт.

o

2. Көрсөткүчтүү жана логарифмдик функциялар.

а) Көрсөткүчтүү функция — a^x. Эгерде $a > 0$ санын алсак, анда ар бир рационалдык сандар x жана y үчүн (б.а. $x, y \in Q$ үчүн)

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \tag{1}$$

барабардыгы, ошондой эле $a > 1$ үчүн

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y \tag{2}$$

барабарсыздыгы орун алышарын мектептеги математиканын программасынан таанышбыз. Азыр биз a^x функциясын x тин иррационалдык маанилери үчүн да аныктайбыз. Анда a^x функциясы x тин $\mathbb{R}^1=(-\infty, \infty)$ деги бардык маанилери үчүн аныкталган болот. Ошону менен эле бирге a^x көрсөткүчтүү функциясы бардык $x\in\mathbb{R}^1$ үчүн үзгүлтүксүз болуу менен, (1) жана (2) формулалары да аткарыларын көрсөтөбүз. Бул максатта бизге төмөндөгү лемма жардамга келет:

Лемма. *Эгерде $a>1$ жана $0<h\leqslant 1$ — рационалдык сандар болсо, анда*

$$|a^h-1|\leqslant 2(a-1)|h| \tag{3}$$

барабарсыздыгы орун алат.

○ Натуралдык сан n үчүн $a^{\frac{1}{n}}=1+\lambda$, мында $\lambda>0$ экенин эске алып, Ньютондун биному боюнча

$$a=(1+\lambda)^n>1+n\lambda$$

жана

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}$$

экенин жаза алабыз. Мындан башка

$$\frac{1}{n+1}<h<\frac{1}{n}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

барабарсыздыгын алабыз. Андыктан

$$a^h-1\leqslant a^h-1<\frac{a^h-1}{n}=\frac{n+1}{n}(a-1)\frac{1}{n+1}<2(a-1)h$$

жана

$$1-a^h=\frac{a^h-1}{a^h}<a^h-1<\frac{2(a-1)}{h}. \bullet$$

Акыркы эки барабарсыздыктан (3) барабарсыздык келип чыгат. (3) барабарсыздыктын негизинде төмөнкүнү жаза алабыз:

$$x,\ y \in Q(0 < y - x < 1) \Rightarrow a^y - a^x = \\ = a^x(a^{y-x} - 1) \leqslant 2a^x(a-1)(y-x). \tag{4}$$

Эми биз

$$Q_d = \{x \in Q : x \leqslant d\}$$

көптүгүн ала турган болсок, анда (4) формула боюнча

$$a^y - a^x \leqslant M(y-x), \tag{5}$$

мында $x,\ y \in Q_d,\ 0 < y - x \leqslant 1,\ M = 2(a-1)a^d$, барабарсыздыгын алабыз, M саны x жана y менен байланышпаган турактуу.

(5) формуладан төмөнкүнү жаза алабыз:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \left(\text{мисалы, } \delta = \frac{\varepsilon}{M}\right):$$

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |a^y - a^x| < \varepsilon. \tag{6}$$

Демек, a^x функциясы Q_d көптүгүндө үзгүлтүксүз экендигин алабыз.

Муну башкача да жаза алабыз: $x_0 = Q_d$ — кайсы бир белгиленген чекит болсо, б.а. $x_0 < d$ болсо, жана $\{x_n\} \subset Q_d$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ — каалаган удаалаштыкты алсак, анда

$$|a^{x_n} - a^{x_0}| \leqslant M|x_n - x_0| \to 0,\ n \to \infty,$$

б.а.

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}.$$

Эми $x_0 \in Q_d$ деген каалаган иррационалдык сан алынган болсо ($x_0 < d$) жана $\{x_n\} \subset Q_d$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ болсо, анда $\{a^{x_n}\}$ удаалаштыгы да пределге ээ болоорун жана бул предел $\{x_n\}$ удаалаштыктын кандай жол менен алынганынан көз каранды эмес экендигин далилдейбиз. б.а.

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0} \tag{7}$$

деп жаза ала турганыбызды далилдейбиз.

Чындыгында да, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ дегенден Кошинин шарты боюнча

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):$$

$$N < n,\ m \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Андыктан (6) формула боюнча

$$N < n,\ m \Rightarrow |a^{x_n} - a^{x_m}| < \varepsilon.$$

Бул учурда (7) предели да орун алат жана ал предел $\{x_n\} \subset Q_d$ удаалаштыкты кантип тандап алгандан көз каранды эмес. Буга ишенүү үчүн $\{x_n'\} \subset Q_d$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = a$ — удаалаштыгын алалы, анда (6) формула боюнча

$$|a^{x_n} - a^{x_n'}| \leqslant M\,|x_n - x_n'| \to 0,\ n \to \infty.$$

Ошентип, a^x функциясы бардык анык сандардын көптүгүндө, б.а. бардык $x \in \mathbb{R}^1$ үчүн, аныкталгандыгын жана анда ал үзгүлтүксүз экендигин көрдүк.

Эми (1) жана (2) формулаларга кайрылсак, анда ар бир $x_0 \in \mathbb{R}^1$ үчүн эркибизче алынган $\{x_n\} \subset Q$, $\{y_n\} \subset Q$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ удаалаштыктары үчүн (2) формулага келебиз:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^{x_0} \cdot a^{y_0} = a^{x_0 + y_0}.$$

Ошондой эле, $\{x_n\} \subset Q\ (x_n \leqslant x_{n+1})$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\{y_n\} \subset Q$, $(y_n \geqslant y_{n+1})$: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ удаалаштыктары үчүн λ жана r рационалдык сандарын $x < \lambda < r < y$ барабарсыздыктарын канааттандыра тургандай кылып алууга болот, андан

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{x_n} < a^{\lambda} < a^{r} < a^{y_n}\right) = a^{x} \leqslant a^{\lambda} < a^{r} \leqslant a^{y}$$

барабарсыздыгын алып, (1) формулага келебиз.

Ушул учурга чейин биз $a > 1$ деп эсептеп келдик. Эгерде $0 < a < 1$ болсо, анда

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}, \ x \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$$

деп алабыз.

б) **Логарифмдик функция** — $log_a x (a > 0, \ a \neq 1)$. $a > 1$ учурду алалы. Анда $y = a^x$ функциясы бүткүл сандык ок $\mathbb{R}^1$ де аныкталып жана анда анык өсүүчү болоорун билебиз. Андан тышкары

$$\lim_{x \in \mathbb{R}^1} a^x = 0, \ \ \sup_{x \in \mathbb{R}^1} a^x = \infty.$$

Демек, a^x функциясы $\mathbb{R}^1$ сан огунун чекиттерин $\mathbb{R}^1_+ = (0,\infty)$ көптүгүнүн чекиттерине өзгөртүп түзөт. 7-теорема боюнча $(0, \infty)$ де аныкталган үзгүлтүксүз тескери функция бар жана ал анык өсүүчү болот. Ал функция *а негизиндеги у тин логарифми* деп аталат да,

$$(a^x)^{-1} = log_a y$$

аркылуу белгиленет. Мындан (y ти x менен алмаштырып)

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty, \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} log_a x = -\infty$$

экендигин алабыз.

Ушундай эле жол менен $a<1$ учурду да кароого болот. a^x функциясы $(-\infty, \infty)$ көптүгүн $(0, \infty)$ көптүгүнө өзгөртүп түзөт, бирок бул учурда ал анык кемүүчү функция болот. $(0, \infty)$ көптүгүндө аныкталган тескери функция $log_a x$ бул учурда да анык кемүүчү болуп,

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = -\infty, \ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} log_a x = +\infty$$

мүнөзгө ээ.

Демек, жалпы алганда

$$a^{log_a x} = x (0 < x < \infty) \ \ log_a a^x = x (-\infty < x < b).$$

мында $a \neq 1,\ 0 < a$. Ал эми $x,\ y > 0$ учурда a^x функциянын касиеттери боюнча төмөнкүлөрдү алабыз:

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

жана

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Эгерде бул формулада (xy) ти $\left(\frac{x}{y}\right)$ менен алмаштырсак, анда

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

болоорун алабыз. Ал эми

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y\log_a x} \ (x > 0)$$

болгондуктан,

$$\log_a x^y = y\log_a x \ (a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0)$$

формуласына ээ болобуз.

$a \neq 1,\ b \neq 1$ сандары үчүн дагы бир формуланы алабыз:

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

мындан

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Негизи e саны болгон a нын логарифмасы ***натуралдык логарифм*** деп аталат жана $\log_e x = \ln x$ аркылуу белгиленет.

3. Даражалуу функция — x^p.

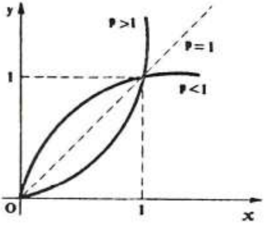
Бул функцияны ар бир $p \in \mathbb{R}^1$ үчүн

$$x^p = e^{p\ln x} (x > 0) \tag{1}$$

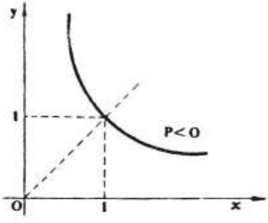
түрүндө жазууга болот жана анын касиеттерин көрсөткүчтүү жана логарифмдик функциялардын касиеттеринин негизинде изилдөөгө болот. Биринчи иретте, бул функция $\mathbb{R}^1_+ = (0,\ \infty)$ де аныкталган жана анда үзгүлтүксүз. Ал эми $p > 0$ учурда анык өсүүчү болот да,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^p = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^p = +\infty.$$

Эгерде $p > 0$ учурда $0^p = 0$ деп белгилесек, анда x^p функциясы $x = 0$ чекитте оң жагынан үзгүлтүксүз болот.



15-чийме



16-чийме

$p < 0$ учурунда x^p функциясы R^1_+ де үзгүлтүксүз жана анык кемүүчү болот, андан тышкары

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^p = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^p = 0.$$

(1) формуладан даражалуу функциянын мүнөздүү касиеттерин алабыз:

$$(xy)^p = e^{p\ln(xy)} = e^{p\ln x} - e^{p\ln y} = x^p \cdot y^p, \ (x, \ y) > 0.$$

Келтирилген чиймелерд н көрүнүп тургандай, анын графиги (1.1) чекити аркылуу өтөт да, тигил же бул багытта өсүүчү ($p > 0$) же кемүүчү ($p < 0$) болушат.

Көрсөткүчтүү — даражалуу функциялар. Эгерде $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары (a, b) аралыгында аныкталышкан дейли, мында $u(x) > 0 \cdot \left(x \in (a, \ b)\right)$. Анда

$$y = e^{v(x)\ln u(x)}$$

формуласы менен аныкталган функция *көрсөткүчтүү — даражалуу функция* деп аталат жана

$$u(x)^{v(x)}$$

аркылуу белгиленет. Эгерде u жана v функциялары (a, b)

аралыгында үзгүлтүксүз болушса, анда u^v функциясы бул аралыкта үзгүлтүксүз болот, себеби — u^v функциясы

$$y = e^t,\ t = v(x)\ln u(x)$$

түрүндөгү үзгүлтүксүз функциялардын композициясынан түзүлгөн татаал функция.

4. Тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялар.

а) Тригонометриялык функциялар. $y = \sin x$ жана $y = \cos x$ функцияларынын $R^1 = (-\infty,\ \infty)$ де аныкталып жана анда үзгүлтүксүз экендигин жогоруда келтиргенбиз (§ 1 деги 4–5-мисалдарды кара).

Эми $y = tgx$ функциясын ала турган болсок, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ болгондуктан, бардык $\cos x \neq 0$ шарты аткарыла турган x тин маанилери үчүн, б.а. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ (n \in N)$ үчүн бул функция аныкталган жана үзгүлтүксүз.

Ошондой эле $y = ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ функциясы да $x \neq \pi n$, $(n \in N)$ үчүн аныкталган жана үзгүлтүксүз.

б) Тескери тригонометриялык функциялар. $y = \sin x$ функциясын алалы жана аны $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндиде карайлы. Бул функция Δ кесиндисинде үзгүлтүксүз гана болбостон, анда анык өсүүчү да боло алат. Анын маанилеринин көптүгү болуп $[-1,\ 1]$ кесиндиси кызмат кылат. Тескери функциянын жашашынын теоремасы боюнча $[-1,\ 1]$ кесиндисинде ага тескери болгон функция бар болот, аны $y = \arcsin x\left(x \in [-1,\ 1]\right)$ аркылуу белгилешет. Айта кете турган нерсе: Жалпы алганда $y = \arcsin x$ функциясы $y = \sin x$ функциясына карата тескери функция боло албайт, себеби акыркы функция $\mathbb{R}^1$ де аныкталып жана анда мезгилдүү. Ошондуктан $arcsinx$ функциясы $sinx$ функциясынын аныкталуу областынын $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисинде гана аныкталган.

Демек,

$$sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1, 1],$$
$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$arcsin(-x) = -arcsinx, \quad x \in [-1, 1],$$

б.а. $arcsinx$ — так функция.

$y = cosx$ функциясы $[0, \pi]$ участогунда үзгүлтүксүз жана анык кемүүчү. Ошондуктан анда аныкталган тескери функцияны

$$y = arccosx, \quad x \in [-1, 1]$$

аркылуу белгилешет. Ал үчүн

$$cos(arccosx) = x, \quad x \in [-1, 1],$$
$$arccos(cosx) = x, \quad x \in [0, \pi].$$

Эми

$$y = tgx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

функциясын алсак, бул аралыкта (ачык интервалда) анын тескери функциясынын бар экендиги жогоруда көрсөтүлгөн принциптерден келип чыгат. Аны $y = arctgx$, $x \in \mathbb{R}^1$, аркылуу белгилешет. Бул тескери функциянын маанилеринин көптүгү — $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = ctgx$, $x \in (0, \pi)$ функциясынын тескери функциясы $y = arcctgx$ болот.

5. Гиперболалык функциялар жана алардын тескери функциялары.

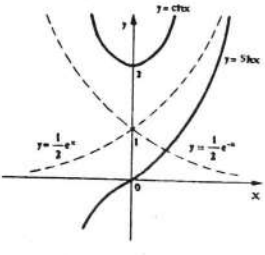
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

формулалары аркылуу берилген функциялар *гиперболалык синус* жана *гиперболалык косинус* функциялары деп аталат. Бул функциялар $\boldsymbol{R}^1$ де аныкталган жана үзгүлтүксүз. Кадимки синус жана косинус функцияларындай эле, shx — *так функция*, ал эми — chx *жуп функция* (17-чийме):

$$shx + chx = e^x,$$
$$ch^2x - sh^2x = 1,$$
$$ch^2x = 1 + sh^2x,$$
$$sh2x = 2shx \cdot chx.$$

Кадимки тригонометриялык функцияларга окшоп эле *гиперболалык тангенс* жана *гиперболалык котангенс* функцияларын да

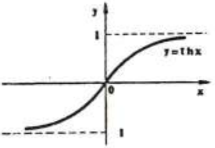
$$thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx},$$



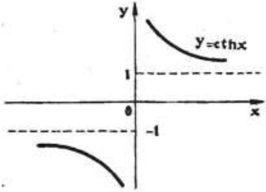
17-чийме

формулалары аркылуу аныктайбыз, мында thx функция

R^1 де аныкталган жана анда үзгүлтүксүз, ал эми $cthx$ $R^1 \setminus \{0\}$ көптүгүндө аныкталган жана анда үзгүлтүксүз, экөө тең — так функциялар.



18-чийме



19-чийме

Гиперболалык функциялардын графиктери 17-, 18-, 19-чиймелерде көрсөтүлгөн.

Тескери гиперболалык функциялар. $y = shx$ функциясын алалы.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

теңдемесин x ке карата чыгарып,

$$e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2},$$

экенин алабыз. Бирок $e^x > 0$ болгондуктан

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2},$$

мындан

$$x = ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

Демек, shx функциясынын тескери функциясы табылды, аны

$$y = arcshx = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ x \in R^1,$$

аркылуу белгилешет (*"ареа-синус x"* деп окулат).

Ушундай эле жол менен (ареа-косинус)

$$y = arcshx = ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

экенин алабыз, мында бул функция $x \geq 1$ учурда аныкталган.

Тескери гиперболалык функциялардын башка касиеттерине бул жерде токтолбойбуз.

§ 5. БИРИНЧИ УНИВЕРСАЛДЫК ПРЕДЕЛ

Эгерде $x \to 0$ болсо, анда $\frac{sinx}{x} \to 1$ болоорун, б.а.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \tag{1}$$

формуласын далилдейли, бул *биринчи универсалдык предел* деп аталат, себеби мунун жардамы менен тригонометриялык формада берилген туюнтмалардын негизги бөлүгүнүн пределдери табыла алат. Биринчи иретте $\varphi(x) = \frac{sinx}{x}$ функциясы $R^1 \backslash \{0\}$ көптүгүндө аныкталган жана анда үзгүлтүксүз экендигин көрөбүз.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ учурду алалы. Мындан (20-чийме)

$$sinx < x < tgx$$

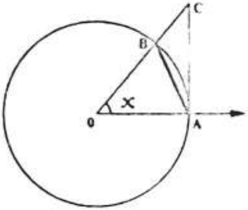
барабарсыздыгын алабыз, себеби берилген жааны тартып турган хорданын жарымы ага туура келген жаанын узундугунан кичине, ал эми жаанын узундугунун өзү ал жааны камтып турган көп бурчтуктун жактарынан кичине. Ошондуктан

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx},$$

же

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Акыркы барабарсыздык x тин он эле эмес, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ барабарсыздыгын канааттандырган бардык x тер үчүн да орун алат, себеби ал жуп функция. $\cos x$ функциясы үзгүлтксүз. Ошондуктан



20-чийме

$$\lim_{x\to 0}\cos x\leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\leqslant \lim_{x\to 0}1$$

же

$$1\leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\leqslant 1.$$

Мунун өзү (1) барабардыкты берет.

§ 6. ЭКИНЧИ УНИВЕРСАЛДЫК ПРЕДЕЛ

Эгерде $x\to 0$ болсо, анда $\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$ болоорун, б.а.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{1}$$

формуласын далилдейбиз.

Биз мурун

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \tag{2}$$

экенин далилдегенбиз (II гл. кара). (1) формулага кайрылалы. $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ функциясынын $1+\frac{1}{x}>0$ учуруна токтолобуз. Анда $\varphi(x)$ функциясы $(-\infty,\ -1)$ жана $(0,\ \infty)$ аралыгында аныкталган.

1) $x \to \infty$ учурун карайлык. x тин мааниси канчалык чоң болсо дагы ал n жана $n+1$ натуралдык сандарынын арасында камтылган болот: $n \leqslant x < n+1$.
Мындан

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \tag{3}$$

барабарсыздыктарын жазып алабыз. Эми (3) барабарсыздыктын эки четки мүчөлөрүнүн пределдерин табалы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e;$$

Барабарсыздыктардагы пределдер жөнүндөгү теорема боюнча (II гл. кара)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

формуласын алабыз.

2) Эми $x \to -\infty$ учурун карайлык. Бул учурда $y = -(1+x)$ деп белгилесек, анда $x = -(1+y)$ болот. Демек, $x \to -\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow y \to +\infty$. Ошондуктан

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{-(1+y)} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{-(1+y)} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1+y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \left(1+\frac{1}{y}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Демек, $x \to \pm\infty$ учурларда (1) формула орун алат. Эгерде $\frac{1}{y} = x$ деп белгилеп алсак, анда (1) формуладан

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

формуласын алабыз.

Э с к е р т ү ү. Эгерде $x=a$ чекитинин кайсы бир $\overset{o}{U}(a)$ аймагында $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ аныкталышса жана $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x)$ $\left(\alpha(x)\neq 0,\right.$ $\left.\beta(x)\neq 0\right)$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = P$ болсо, анда

$$\lim_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\beta(x)} = e^{P}.$$

Айрым алганда, $\alpha(x)=\beta(x)$ учурда $(P=1)$, мындан

$$\lim_{x\to a}\left(1+q\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)} = e^{q},$$

$$q = const,\ x\in\overset{o}{U}(a).$$

$$\triangle\ \lim_{x\to a}\ (1+\alpha(x))^{1/\beta(x)} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right]^{\alpha(x)/\beta(x)} =$$

$$= exp\left[\lim_{x\to 0}\ \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\ln(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}\right] = e^{P}.\ \blacktriangle$$

Айрым пределдер. 1. Эгерде $a>0,\ a\neq 1,$ болсо, анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

болоорун далилдегиле.

Эгерде

$$f(x) = \begin{cases}(1+x)^{1/x}, & x\neq 0,\\ e, & x=0\end{cases}$$

функциясын ала турган болсок, анда бул функция $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз экенине ишенүү кыйындыкка турбайт. Ошондуктан $\log_a f(x)$ функциясы $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз. Демек,

$$\lim_{x\to 0} \log_a f(x) = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \log_a e.$$

Мындан $a = e$ учурунда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

2. Эгерде $a > 0$, $a \neq 1$, болсо, анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Мында $y = a^x - 1$ деп белгилеп алалы. Анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a.$$

$a = e$ учурда мындан

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

3. Далилдегиле:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda.$$

Эгерде $y = (1+x)^\lambda - 1$ деп алсак, $y + 1 = (1+x)^\lambda$ барабардыгын $\lambda \ln(1+x) = \ln(1+y)$ аркылуу жазып жана $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ экенин эске алып

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\lambda \ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\lambda \ln(1+x)}{x} = \lambda$$

болоорун алабыз.

§ 7. ФУНКЦИЯЛАРДЫН ЭКВИВАЛЕНТТҮҮЛҮГҮ

Функцияларды салыштыруу.

Эгерде E көптүгүндө аныкталган f жана φ функциялары үчүн

$$x \in E \Rightarrow |f(x)| \leqslant c\,|\varphi(x)|,\ c > 0 - const$$

аткарылса, анда $x \in E$ үчүн

$$f(x) = O(\varphi(x))$$

деп жазышат жана f функциясы E де φ тартиптеги функция деп аталат (окулушу: "эф барабар чоң омикрон φ ден").

Мисалы,

$$x \in E \Rightarrow |f(x)| \leqslant c,\ c \geqslant 0 - const,$$

болсо, анда $f(x) = O\,(1)$ деп жазабыз жана f функциясы E де чектүү функция экенин алабыз.

Эгерде

$$x \in E \Rightarrow f(x) = O(\varphi(x))$$

жана

$$x \in E \Rightarrow \varphi(x) = O(\psi(x))$$

болсо, анда

$$x \in E \Rightarrow f(x) = O(\psi(x))$$

болоору айкын болуп турат.

Мисалдар. 1. $x \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow \sin x = O(x)$;

2. $x \in E = [0,1] \Rightarrow x^2 = O(x)$; $x \in E = [1,\infty] \Rightarrow x = O(x^2)$;

"Чоң омикрон" белгиси менен эле бирге математикада "кичине омикрон" да кенен колдонулат.

Эгерде $x = a$ чекитинин кайсы бир $\overset{\circ}{U}(a)$ аймагында f, φ, ψ функциялары аныкталып жана

$$x \in \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x),\ \lim_{x \to a} \psi(x) = 1$$

9*

болсо, анда $x \to a$ учурда f жана φ функциялары эквиваленттүү (асимптотика боюнча барабар) деп аталышат жана аны

$$x \to a \Rightarrow f(x) = o(\varphi(x))$$

деп белгилешет (окулушу: " $x \to a$ учурунда эф барабар кичи омикрон φ ден").

Бул жерде $x = a$ чекитинин өзү каралып жаткан функцияларга аныкталуу чекити болушу үчүн зарылчылык жок жана ал чектүү да, чексиз да чекит болушу мүмкүн .

Мисалдар. 1. $x \to +\infty \Rightarrow x^n = o(e^x)$;

2. $x \to 0 \Rightarrow x^2 = o(x)$;

3. $x \to \infty \Rightarrow x = o(x^2)$;

4. $x \to o \Rightarrow \sin x = o(\sqrt{x})$.

Эгерде $x = a$ чекитинин кайсы бир $\dot{U}(a)$ аймагында f жана φ функциялары аныкталып (a чекитинин өзү алар үчүн аныкталуу чекит болбошу да мүмкүн) жана

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = p, \ 0 \neq p - const. \qquad (1)$$

болсо, анда

$$x \to a \Rightarrow f(x) = o(\varphi(x))$$

деп да жазышат. Мисалы, $x \to 0 \Rightarrow x = o(\sin x)$

$$x \to o \Rightarrow \ln(1 + x) = o(x).$$

Эгерде (1) барабардыкта $p = 1$ болуп калса, анда f жана φ функцияларын $x \to a$ учурда эквиваленттүү (асимптотика боюнча барабар) дешет жана

$$x \to a \Rightarrow f(x) \sim \varphi(x)$$

деп белгилешет.

Мисалы. 1. $x \to o \Rightarrow \sin x \sim x$, себеби $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $x \to o \Rightarrow 1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$, $1 - cosx = 2sin^2 \frac{x}{2}$,

$x \to o \Rightarrow sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$, демек, $x \to o \Rightarrow 1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$.

3. $x \to \infty \Rightarrow \frac{x^4}{x^2+5} \sim x^2$, себеби $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^2+5} = \lim \frac{1}{1+\frac{5}{x^2}} = 1$.

8-теорема. *f жана φ функциялары $x \to a$ учурунда эквиваленттүү болушу үчүн*

$$x \to a \Rightarrow f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))\left(x \in \overset{\circ}{U}(a) \Rightarrow \varphi(x) \neq 0\right) \qquad (2)$$

барабардыгынын орун алышы зарыл жана жетиштүү болот.

○ Эгерде бул эки функция $x \to a$ учурда эквиваленттүү болушса, б.а. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ болсо, анда $x \to a \Rightarrow$

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha(x)\varphi(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)).$$

Тескерисинче, эгерде (2) формула орун алса, анда $x \to a \Rightarrow f(x) = \varphi(x) + \alpha(x)\varphi(x)$. Мындан

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \alpha(x),\ x \in \overset{\circ}{U}(a),$$

б.а.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}(1 + \alpha(x)) = 1. \ ○$$

Натыйжа. *Эгерде $x \to a \Rightarrow f(x) \sim \varphi(x)$ жана $x \to a \Rightarrow \varphi(x) \sim$ $\sim \psi(x)$ болсо, анда $x \to a \Rightarrow f(x) \sim \psi(x)$.*

○ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\psi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ ○

Мисалдар. 1. $x \to o \Rightarrow tgx \sim x$ себеби

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \cdot \frac{1}{cosx} = 1$$

2. $x \to o \Rightarrow arcsinx \sim x$, себеби $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{siny} = 1.$

3. $x \to o \Rightarrow e^x - 1 \sim x$, себеби $\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Эгерде $x \to 0$ учурда берилген $\varphi(x)$ функциясы үчүн

$$x \to o \Rightarrow \varphi(x) \sim cx^r$$

боло тургандай $c \neq 0$ жана r сандарын табууга мүмкүн болсо, анда cx^r функциясы $\varphi(x)$ функциянын $x \to 0$ учурдагы негизги даражалуу мүчөсү (асимптотикасынын негизги бөлүгү) деп аталат. Мисалы, эгерде

$$x \to o \Rightarrow \varphi(x) \sim c_1 x^r, \ \psi(x) \sim c_2 x^l$$

болсо, анда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{c_1 x^r}{c_2 x^l} = \begin{cases} \frac{c_1}{c_2}, & r = l; \\ o, & r > l; \\ \infty, & r < \infty. \end{cases}$$

IV ГЛАВА

ТУУНДУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУЛУШУ

§ 1. ТУУНДУ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Туундунун түшүнүгүнө келтирилүүчү маселелер.

а) *Ылдамдык жөнүндө маселе.* Материалдык чекит түз сызык боюнча жылсын жана кыймыл башталгандан тартып t убактысында $S = S(t)$ жолун басып өтсүн. Убакыт t дан $t+\Delta t$ га дейре материалдык чекит $S(t+\Delta t)-S(t)$ жолун басып өтөт, ошондуктан ушул убакыттагы орточо ылдамдык

$$v_{\text{орто}} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Эгерде каралып жаткан жылуу кыймылы бир калыпта эмес болсо, анда $v_{\text{орто}}$ ылдамдык t дан турактуу маанисинде, Δt өзгөрүшү менен кошо өзгөрөт да Δt кичирейген сайын $v_{\text{орто}}$ чекиттин t моментиндеги жылуу кыймылын ошончолук жакшы мүнөздөйт.

Орточо ылдамдыктын $\Delta t \to 0$ дагы пределин материалдык чекиттин t моментиндеги ылдамдыгы (көз ирмемче ылдамдык) деп айтабыз, б.а. t моментиндеги v ылдамдык

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

барабардыгы менен аныкталат.

Ошентип, кыймылдын t моментиндеги ылдамдык өтүлгөн жолдун $\Delta S = S(t+\Delta t)-S(t)$ өсүндүсүнүн убакыттын

t дан $t+\Delta t$ га чейинки аралыкта алынган Δt өсүндүсүнө болгон катышынын, $\Delta t \to 0$ дагы пределине барабар.

Мисалы, эгерде материалдык чекит $S = gt^2/2$ (эркин түшүү закону) боюнча жылуу кыймылына келсе, анда

$$v_{\text{орто}} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{g}{2\Delta t}\left((t+\Delta t)^2 - t^2\right)$$

же

$$v_{\text{орто}} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t.$$

Мындан $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{орто}} = gt$, б.а. $v = gt$.

б) *Жаныма жөнүндө маселе.* Берилген $f(x)$ функциясы x_0 чекиттин δ — аймагында аныкталсын жана $x = x_0$ маанисинде үзгүлтүксүз болсун. Биз анда $y = f(x)$ функциясынын графигин $M_0(x_0, y_0)$ (мында $y_0 = f(x_0)$) чекитине жүргүзүлүүчү жаныма жөнүндөгү суроону карайлы. Эгерде Δx — аргументтин өсүндүсү $0 < |\Delta x| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырса, анда $M_0(x_0, y_0)$ жана $M\left(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x)\right)$ чекиттери аркылуу өтүүчү l түз сызыгынын теңдемесин

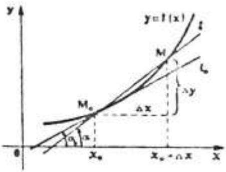
$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) \tag{1}$$

түрүндө жазабыз (21-чийме). Мында

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha.$$

Бул түз сызыкты кесүүчү түз сызык деп, ал эми $\kappa = tg\alpha$ санын l түз сызыгынын бурчтук коэффициенти деп айтышат: $\alpha = \alpha(\Delta x)$ l — түз сызыгы менен ox огу аркылуу түзүлгөн бурч (бурч ox огунун оң багытынан баштап саат стрелкасына карпы эсептелинет).

Эми $\Delta x \to 0$, анда $f(x)$ функциясы $x = x_0$ маанисинде үзгүлтүксүз болгондуктан $\Delta y \to 0$ жана ошондой эле $MM_0 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$.



21-чийме

Ийри сызыктын жанымасы деп, $y=f(x)$ теңдемеси аркылуу берилген жана M_0 чекитине жүргүзүлгөн $\Delta x \to 0$ дагы кесүүчү түз сызыгынын пределдик абалы l_0 түз сызыгын айтабыз. Эгерде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \kappa_0 \tag{2}$$

предели аңыкталса, анда сөзсүз кесүүчү түз сызыктын пределдик абалы да аныкталат. Мына ошентип, эгерде (2) предел аныкталса, анда M_0 чекити аркылуу өткөн, κ_0 бурчтук коэффициенттүү түз сызыкты, $y = f(x)$ функциясынын графигин M_0 чекитине жүргүзүлгөн жанымa деп айтышат. Алдыда каралган, функциянын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышынын предели жөнүндөгү маселе, математикалык анализдин негизги түшүнүгү болгон туунду жөнүндөгү түшүнүккө алып келет.

2. Туундунун аныктамасы.

Аныктама. *Берилген $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталсын жана $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ катышы $\Delta x \to 0$ чектүү пределге ээ болсун. Анда ал пределди $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу деп айтабыз да $f'(x)$, $f'_x(x_0)$ же $y'(x_0)$ символдорунун бири менен белгилейбиз, б.а.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Аныктама боюнча $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу функциянын $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ өсүндүсүнүн аргументин Δx өсүндүсүнө болгон катышынын $\Delta x \to 0$ дагы предели, б.а.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4}$$

Берилген функциянын туундусун табуу амалы ал функцияны *дифференцирлөө*, ал эми туундуга ээ болуучу функцияларды *дифференцирленүүчү функция* деп айтышат.

1-мисал. $y = c$, $y = x^n$, $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ функциялардын туундуга ээ болушун далилдегиле жана ал туундуларды тапкыла.

$\triangle$ а) Эгерде $y = c$ (c— туруктуу) болсо, анда $\Delta y = c - c = 0$, ошондуктан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, б.а.

$$(c)' = 0. \tag{5}$$

б) Эгерде $y = x^n (n \in \mathbb{N})$ болсо, анда $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$

$= x^n + c_n^1 x^{n-1}\Delta x + c_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - x^n$,

$\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + 0(\Delta x)$, мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + 0(1)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$,

б.а.

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

в) Эгерде $y = \sin x$ болсо, анда $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$, мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

Биз $\cos x$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн эске алсак, анда $\Delta x \to 0$ да $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$, ал эми $t \to 0$ да $\frac{\sin t}{t} \to 1$.

Демек $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \cos x$, б.а.

$$(sinx)' = cosx. \tag{7}$$

г) Эгерде $y = cosx$ болсо, анда $\Delta y = cos(x + \Delta x) - cosx =$

$= -2sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot sin\frac{\Delta x}{2}$, мындан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -sinx$, б.а.

$$(cosx)' = -sinx. \tag{8}$$

д) Эгерде $y = a^x$ болсо, анда $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, мындан $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x lna$. себеби $t \to 0$

да $\frac{a^t - 1}{t} \to lna$ (III гл. § 5. 2-п.)

Ошентип, эгерде $a > 0$, $a \neq 1$ болсо, анда

$$(a^x)' = a^x lna. \tag{9}$$

Бул (9) формуладан $a = e$ учурунда

$$(e^x)' = e^x, \tag{10}$$

формуласын алабыз. ▲

1-эскертүү. Негизи e саны болгон көрсөткүчтүү функциянын, (10) формуланын негизинде, туундусу ал функциянын өзүнө барабар. Ушунун өзү, математикалык анализде жана анын колдонулуштарында даражалардын негизине жана логарифмалардын негизине дайыма e санынын алынышынын себебин түшүндүрөт.

2-мисал. $y = log_a x (a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$ жана $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},$ $x > 0)$ функцияларынын туундуларын тапкыла.

△ а) Эгерде $y = log_a x$ болсо, анда $\Delta y = log_a(x + \Delta x) -$ $- log_a x = log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x}, \text{ мындан}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}$, себеби $t \to 0$ да $\frac{\log_a(1+t)}{t} \to \frac{1}{\ln a}$ (III гл. § 5. 1-п.).

Демек, эгерде $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ болсо, анда

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{11}$$

Бул (11) формуладан $a = e$ учурунда

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{12}$$

формуласына ээ болобуз.

б) $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ учурунда x^{α} функциясынын туундусу (6) формула аркылуу алынат. Ал эми ар кандай $\alpha \in \mathbb{R}$ жана $x > 0$ үчүн

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1} \tag{13}$$

формуласы орун алаарын көрсөтөлү. Чынында эле, эгерде $y = x^{\alpha}$ болсо, анда $\Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right)$,

мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\alpha - 1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$. Эми $t \to 0$ да $\frac{(1+t)^{\alpha} - 1}{t} \to \alpha$ (III гл. § 5. 3-п.), анда $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \alpha\, x^{\alpha - 1}$, б.а. (13) формула орун алат. ▲

Теорема. *Функция $y = f(x)$, $x = x_0$ чекитинде туундуга ээ болсо, анда ал ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.*

○ Алдыдагы (4) барабардыктан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x).$$

Мында $\Delta x \to 0$ да $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ барабардыгын алабыз жана мындан

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{14}$$

формуласын жазсак болот. Эгерде $\Delta x \to 0$, анда (14) барабардыктын оң жагы нөлгө умтулат жана ошондуктан $\Delta y \to 0$.

Демек, $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз. ●

3. Туундунун геометриялык мааниси.

Эгерде $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде туундуга ээ болсо, б.а.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

чектелген предели аныкталса, анда (1) теңдеме менен берилген l кесүүчүнүн пределдик абалы да сөзсүз аныкталат (21-чийме). Бул болсо $y = f(x)$ функциясынын графигиндеги $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ чекитинде l_0 жанымасы аныкталаарын билгизет жана (2) формула боюнча $\kappa_0 = f'(x_0)$, мында κ_0 болсо l_0 жаныманын бурчтук коэффициенти. Ал эми $\kappa_0 = tg\alpha_0$ (α_0 — жаныма менен абсцисса огунун оң багыты боюнча жүргүзүлгөн бурч болгондуктан

$$f'(x_0) = tg\alpha_0. \tag{15}$$

Ошентип, туундунун геометриялык мааниси, берилген чекиттеги функциянын туундусу функциянын графигиндеги $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ чекитине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентине барабар. Функциянын графигиндеги $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ чекитине жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин, (1) теңдемедеги $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ катышын $f'(x_0)$ менен алмаштырып

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{16}$$

түрүндө жазабыз.

3-мисал. $y = e^x$ функциясынын графигин, $y = x - 1$ түз сызыгына жарыш кылып жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин жазгыла.

△ Жаныманын бурчтук коэффициенти мисалдын шарты боюнча $y = x - 1$ түз сызыгынын бурчтук коэффициентине барабар, б.а. бирге барабар, анда $f'(x) = e^x - 1$ теңдемесинен $x_0 = 0$ келип чыгат жана ошондой эле $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f'(x_0) = 1$ маанилеринде (16) формуладан

$$y = x + 1$$

жаныманын теңдемесин алабыз. ▲

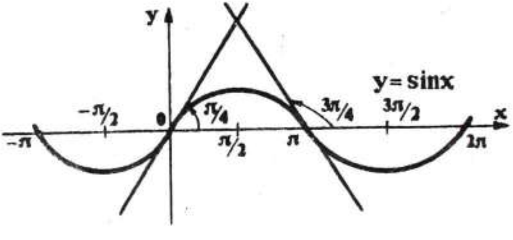
4-мисал. Кандай бурч менен $y = \sin x$ функциясынын графиги ox огун кесет?

△ Синусоида абсцисса огун $x_\kappa = \kappa\pi (\kappa \in z)$ чекиттеринде кесет. Эми ox огу жана функциянын графигинин абсциссасы x_κ чекити менен түзүлгөн бурч α_κ болсун дейли. Анда $f(x) = \sin x$ болгон учурда (15) формуладан

$$f'(x_\kappa) = \cos\kappa\pi = (-1)^\kappa = tg\alpha_\kappa$$

барабардыгын алабыз.

Демек, $x'_\kappa = 2\kappa\pi$ чекитинде синусоида ox огун $\pi/4$ бурч, ал эми $x_\kappa = (2\kappa + 1)\pi$ $(\kappa \in z)$ чекитинде $\frac{3}{4}\pi$ бурч менен кесип өтөт (22-чийме). $y = \sin x$ функциясынын графигине жүргүзүлгөн жаныма, O

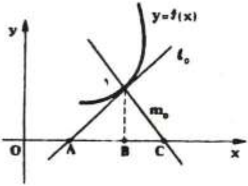


22-чийме

чекитинде $x>0$ учурунда, графиктин үстүндө, ал эми $x<0$ учурунда, графиктин алдында жатаарын белгилей кетмекчибиз, себеби $x \neq 0$ болсо

$$|\sin x| < |x|. \blacktriangle$$

Эми $f'(x_0)$ аныкталсын. $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитине l_0 жанымага перпендикуляр кылып m_0 түз сызыгын жүргүзөбүз. Бул түз сызыкты $y=f(x)$ функциясынын графигиндеги M_0 чекитине жргүзүлгөн *нормал* деп айтабыз. Эгерде A, B, C чекиттери ox огун кесүүчү l_0 жаныманын, m_0 нормалдын жана M_0 чекити аркылуу өтүп, oy огуна жарыш түз сызыктын чекиттери болсо, анда AB кесиндисин жаныманын асты, ал эми BC кесиндисин нормалдын асты деп атайбыз.



23-чийме

Ошентип, $f'(x_0) \neq 0$ учурунда графиктин $M_0(x_0, f(x_0))$ чекитине жүргүзүлгөн нормалдын теңдемеси

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

ал эми

$$|AB| = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|, \quad |BC| = |f(x_0) \cdot f'(x_0)|$$

барабардыктары менен аныкталат.

4. Бир жактуу жана чексиз туундулар.

Бир жактуу пределдер (III гл.) сыяктуу эле сол жаккы жана оң жаккы туундулар жөнүндө түшүнүк киргизүүгө болот.

Эгерде $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинин сол жагында үзгүлтүксүз болсо жана $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ предели аныкталса, анда ал пределди $f(x)$ функциясынын x_0

чекитинин сол жагындагы туундусу деп айтабыз да $f'_-(x_0)$ символу менен белгилейбиз. Ушу сыяктуу эле, эгерде $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинин оң жагында үзгүлтүксүз болсо, анда $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ пределин $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинин оң жагындагы туундусу деп, $f'_+(x_0)$ символу менен белгилейбиз.

Ал эми $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ чекити аркылуу өтүп, $f'_-(x_0)$ жана $f'_+(x_0)$ бурчтук коэффициенттерге ээ болгон түз сызыктарды $y = f(x)$ функциясынын графигиндеги M_0 чекитине жүргүзүлгөн сол жаккы жана оң жаккы жанымалар деп айтышат.

Айтылган $f'(x_0)$ туундунун аныкталышынан $f'_-(x_0)$ жана $f'_+(x_0)$ туундулардын аныкталышы келип чыгат жана

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) \tag{17}$$

барабардыгы орун алат. Бул учурда $y = f(x)$ функциясынын графигиндеги M_0 чекитине жүргүзүлгөн оң жана сол жаккы жанымалар, ошол эле чекитке жүргүзүлгөн жаныма менен дал келет. Тескерисинче, эгерде $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги оң жана сол жаккы туундулар аныкталса жана $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ шарты аткарылса, анда сөзсүз $f'(x_0)$ туунду дагы аныкталат жана (17) барабардык орун алат.

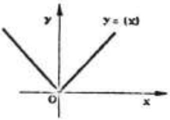
5-мисал. $f(x) = |x|$ функциясынын $x_0 = 0$ чекитиндеги оң жана сол жаккы туундусун тапкыла.

△ Мында $\Delta y = |\Delta x|$ болгондуктан,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1. \quad y = -x; \text{ жана } y = x$$

түз сызыктары $y = |x|$ функциясынын графигинин 0 чекитиндеги оң жана сол жаккы жанымалары болот (24-чийме). ▲



24-чийме

2-эскертүү. Бул мисалда $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ болгондуктан $f(x) = |x|$ функциясы $x_0 = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болгону менен ал чекитте туундуга ээ болбойт жана бул мисал 1-теоремага тескери теорема орун албастыгын, б.а. x_0 чекитинде $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнөн алып ошол чекитте туундуга ээ болушу келип чыкпастыгын көрсөтөт.

Эми чексиз туундунун аныктамасына көңүл буралы. Эгерде $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо жана

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty \tag{18}$$

барабардык аткарылса, анда $x = x_0$ түз сызыгын $y = f(x)$ функциясынын графигинин $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ чекитине жүргүзүлгөн жаныма деп айтышат. Эгерде (1) теңдемени

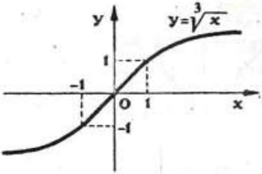
$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_0)$$

түрүндө жазып, бул түз сызыкты l — кесүүчүнүн пределдик $(\Delta x \to 0)$ абалы катарында кароого болот жана бул учурда (18) шарттан $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta x}{\Delta y} \to 0$ келип чыгаарын эске алыш керек.

Эгерде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ болсо, анда $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде $+\infty$ ге барабар болгон туундуга ээ болот. Бул учурда бир жактуу $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ жана $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ пределдерди ирети менен $y = f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги оң жана сол жаккы туундулар деп $f'_-(x_0)$ жана $f'_+(x_0)$ символдор менен белгилешет. Ошентип, эгерде $f'(x_0) = +\infty$ болсо, анда $f'_-(x_0) = +\infty$ жана $f'_+(x_0) = +\infty$ болот. Мисалы, эгерде $f(x) = \sqrt[3]{x}$ болсо, анда $f'(0) = +\infty$, себеби

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Ал эми $y=\sqrt[3]{x}$ функциясынын графигинин (0; 0) чекитиндеги жанымасы $x=0$ түз сызыгы (25-чийме).



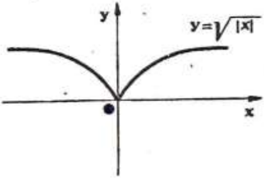
25-чийме

Ушундай эле, эгерде $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ болсо, анда $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде $-\infty$ ге барабар болгон мааниге ээ болот жана $f'(x_0)=-\infty$ деп жазышат.

Ал эми $f'(x_0)=+\infty$ же $f'(x_0)=-\infty$ учурунда $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде чексиз туундуга (кээде ачык-айкын белгисин кошот) ээ болот деп айтышат.

Эми биз $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ учуруна көңүл буралы, бирок $f'(x_0)=+\infty$, $f'(x_0)=-\infty$ шарттарынын бири да орун албасын. Бул учурда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ачык-айкын белгидеги чексиздикти бербейт.

Мисалы, бул орун алат, эгерде $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, ал эми $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ болсо. Ушул касиетке $y=\sqrt{|x|}$ функциясы $x_0=0$ чекитинде ээ (26-чийме),



26-чийме

себеби $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$,

ал эми $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$.

§ –. ТУУНДУ АЛУУНУН ЭРЕЖЕЛЕРИ

1. Сумманы, көбөйтүндүнү, бөлчөктү жана тескери функцияларды дифференцирлөө.

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары x чекитинде дифференцирленүүчү функциялар болушса, анда ушул чекитте $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}\left(g(x)\neq 0\right)$ функциялары да дифференцирленүүчү функциялар болушат жана*

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x), \tag{1}$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0 \tag{3}$$

формулалары орун алат.

○ Биз $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$ жана $\Delta g = g(x+\Delta x)-g(x)$ белгилеп алалы. Анда $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x)$, $\frac{\Delta g}{\Delta x}\to g'(x)$, себеби шарт боюнча $f'(x)$ жана $g'(x)$ туундулары аныкталган. Ал белгилөөлөрдөн $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f$, $g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta g$ барабардыктарын алабыз, мында $\Delta t\to 0$, $\Delta g\to 0$, себеби x чекитинде f жана g функциялары үзгүлтүксүз (§ 1, 1-теорема).

а) Эгерде $y=f(x)+g(x)$ болсо, анда

$$\Delta y = f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x) = \Delta f+\Delta g,$$

мындан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Бул формуланын $\Delta x\to 0$ оң жагы пределге ээ жана ал предел $f'(x)+g'(x)$ берет. Ошондуктан сол жагынын предели да аныкталган жана ал $\left(f(x)+g(x)\right)'$ барабар. Формула (1) далилденди.

10*

б) Эгерде $y = f(x) \cdot g(x)$ болсо, анда

$$\Delta y = f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) = \big(f(x)+\Delta f\big)\big(g(x)+\Delta g\big) -$$
$$- f(x)\cdot g(x) = f(x)\Delta g + g(x)\cdot \Delta f + \Delta f \cdot \Delta g,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot \Delta g.$$

Мындан (2) формула келип чыгат, себеби $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$, $\Delta g \to 0$.

в) Эгерде $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ болсо, анда $\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$ $= \frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)}$ же $\Delta y = \frac{\Delta f \cdot g(x) - \Delta g \cdot f(x)}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}$, мындан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f(x)\right)\cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}.$$

Акыркы барабардыкка $\Delta x \to 0$ пределге өтсөк, $g(x + +\Delta x) \to g(x)$, $g(x) \neq 0$ эске алып, (3) формуланы далилдеген болобуз. ○

1-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы x чекитинде дифференцирленүүчү c турактуу болсо, анда*

$$\big(c\, f(x)\big)' = c\, f'(x)$$

барабардыгы орун алат, б.а. турактуу көбөйтүндүнү туундунун белгисинин алдына чыгарууга болот.

2-натыйжа. *Эгерде $f_\kappa(x)$ функциясы x чекитинде дифференцирленүүчү функция болуп, $c_\kappa (\kappa = \overline{1, n})$ турактуу болсо, анда*

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa\, f_\kappa(x)\right)' = \sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa\, f'_\kappa(x)$$

формуласы орун алат, б.а. дифференцирленүүчү функциялардын сызыктуу комбинациясы ал функциялардын туундуларынын сызыктуу комбинациясына барабар.

Мисалы, эгерде $y = 2e^x - 3x^2 + 4cosx$ болсо, анда $y' = 2e^x - -6x - 4sinx$.

1-мисал.

$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \kappa\pi,\ \kappa \in Z, \tag{4}$$

$$(ctgx)' = \frac{1}{sin^2 x},\ x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in Z, \tag{5}$$

формулаларын далилдегиле.

а) Биз $(sinx)' = cosx$, $(cosx)' = -sinx$, анда бөлчөктүү дифференцирлөөнүн (3) эрежесин колдонуп,

$$(tgx)' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)' \cdot cosx - (cosx)' \cdot sinx}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

алабыз, ал эми мындан (4) формула келип чыгат.

б) Ушул сыяктуу эле

$$(ctgx)' = \frac{(cosx)' \cdot sinx - (sinx)' \cdot cosx}{sin^2 x} = -\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x},$$

мындан (5) формула келет.

2-теорема. *Эгерде $y = f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз жана $\Delta = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, $\delta > 0$ аралыгында анык өсүүчү (кемүүчү) болуп, $f'(x_0) \neq 0$ аныкталса, анда $y = f(x)$ функциясына тескери $x = \varphi(y)$ функциясы $y_0 = f(x_0)$ чекитинде дифференцияланууучу болот жана*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{6}$$

формуласы орун алат.

● Алынган $f(x)$ функциясы Δ аралыгында анык өсүүчү болсун, анда $\alpha = f(x_0 - \delta)$, $\beta = f(x_0 + \delta)$ белгилейли. Тескери функция жөнүндөгү теорема боюнча $[\alpha,\ \beta]$ аралыгында $f(x)$ функциясына тескери $x = \varphi(y)$ функция аныкталып, үзгүлтүксүз жана анык өсүүчү болот жана да $y_0 = f(x_0) \in (\alpha,\ \beta)$, себеби $\alpha = f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta) = \beta$.

Көз каранды эмес y чоңдугуна $y_0+\Delta y \in(\alpha, \beta)$ жаткыдай кылып Δy өсүндүсүн берели жана $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$ белгилейли. Эми $\Delta y \to 0$ да $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ катышынын предели аныкталарын жана ал $\frac{1}{f'(x_0)}$ го барабар болорун көрсөтөлү.

Эгерде $\Delta y \neq 0$ болсо, анда $\Delta x \neq 0$ болорун билүү зарыл. Себеби тескерисинче $\Delta y \neq 0$ болуп $\Delta x = 0$ болсо $\varphi(y_0+\Delta y)=$ $=\varphi(y_0)$, б.а. $\varphi(y)$ функциясы эки ар түрдүү чекитте бирдей мааниге ээ болуп, анык өсүүчү $\varphi(y)$ функциясынын касиетине каршы болот. Ошондуктан

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y/\Delta x} \tag{7}$$

барабардыгы орун алат. Эми $\Delta y \to 0$, анда $\Delta x \to 0$, себеби $x=\varphi(y)$ функциясы y_0 чекитинде үзгүлтүксүз. Бирок, эгерде $\Delta x \to 0$, анда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ аныкталат.

Ошентип (7) барабардыктын оң жагы $\frac{1}{f'(x_0)}$ пределине ээ болот. Демек, анда бул барабардыктын сол жагынын предели да аныкталат жана ал аныктама боюнча $\varphi'(y_0)$ барабар. Ушуну менен (6) формула далилденди. ●

1-эскертүү. Алдынкы (6) формулага x_0 дун ордуна y ти, ал эми y_0 дун ордуна x ти коюп алмаштыруу менен

$$\varphi'(x)=\frac{1}{f'\left(\varphi(x)\right)}, \tag{8}$$

формуласына ээ болобуз.

2-мисал. Төмөнкү формулаларды далилдегиле:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x|<1, \tag{9}$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ |x|<1, \tag{10}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}, \qquad (11)$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}. \qquad (12)$$

$\triangle$ а) Эгерде $y = \varphi(x) = arcsinx,\ |x| < 1$ болсо, анда тескери функция $x = f(y) = siny,\ |y| < \frac{\pi}{2}$ болот. Алдыңкы (8) формуланын негизинде

$$(arcsinx)' = \frac{1}{(siny)'} = \frac{1}{cosy}.$$

Мында $siny = x$ жана $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ болгондуктан $cosy = = \sqrt{1-x^2}$. Демек (9) формуланын тууралыгы далилденди.

б) Эгерде $y = arctgx,\ x \in R$ болсо, анда $x = tgy,\ |y| < \pi/2$. Далилденген (8) жана (4) формулаларды колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = cos^2 y,$$

мында $cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, б.а. (11) формула далилденди.

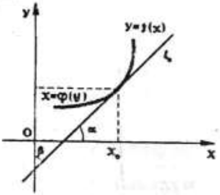
в) Ушул сыяктуу (10) жана (12) формулаларды далилдөөгө болот. Ал формулаларды дагы оңой эле

$$arcsinx + arccosx = \pi/2,\ arctgx + arcctgx = \pi/2$$

барабардыктарын колдонуп алууга болот. $\triangle$

2-эскертүү. Алдынкы 2-теореманын геометриялык жана физикалык талкууланышына токтололу. Эгерде $f'(x_0) \neq 0$ болсо, анда $y = f(x)$ функциясы аныкталган графиктин $M_0(x_0),\ f(x_0)$ чекитине l_0 жанымасы аныкталат жана анын бурчтук коэффициенти $tg\alpha = f'(x_0)$, мындан α бурчу жаныма менен ox огунун оң багыты менен түзүлгөн бурч. Жаныма координат окторуна жарыш эмес, себеби $f'(x_0)$ туунду чектүү жана нөлгө барабар эмес. Аныгыраак болуш үчүн $f'(x_0) > 0$ болсун, анда $0 < \alpha < \pi/2$ (27-чийме).

Эгерде y көз каранды эмес чоңдук, ал эми x функция деп карасак, анда $y = f(x)$ теңдемеси менен аныкталган ийри сызык, ошол эле мезгилде $x = \varphi(y)$ функциясынын графиги болот. Эми β аркылуу жаныма жана oy огунун оң багыты менен түзүлгөн бурчту белгилейли (27-чийме), анда $tg\beta = \varphi'(y_0)$.



27-чийме

Чиймеден көрүнүп тургандай $\alpha + \beta = \pi/2$ болгондуктан

$tg\beta = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, б.а. $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Эми (6) формуланын физикалык маанисин карасак, анда $\varphi'(y_0)$ туунду x өзгөрүлмөсүнүн, y өзгөрүлмөсүнө карата, өзгөрүү ылдамдыгы болот, ал эми $f'(x_0)$ туунду y өзгөрүлмөсүнүн, x өзгөрүлмөсүнө карата, өзгөрүү ылдамдыгын берет. Анда (6) формулада айтылган ылдамдыктар өз ара тескери деген фактыны түшүндүрөт.

2. Татаал функцияны дифференцирлөө.

3-теорема. *Эгерде $y = \varphi(x)$ жана $z = f(y)$ функциялары x_0 жана $y_0\big(y_0 = \varphi(x_0)\big)$ чекиттеринде дифференцирленүүчү болушса, анда $z = f\big(\varphi(x)\big)$ татаал функциясы да x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция болот жана*

$$z'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0) = f'\big(\varphi(x_0)\big)\cdot\varphi'(x_0) \qquad (13)$$

формуласы орун алат.

○ Татаал $z(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз, себеби $\varphi(x)$ жана $f(y)$ функцияларынын дифференцирленүүчүлүгүнөн алардын үзгүлтүксүздүгү келип чыгат (§ 1, 1-теорема). Ошондуктан $z(x)$ функциясы $u_\delta(x_0)$ $(\delta > 0)$ аймакта аныкталган.

Эми Δx — көз каранды эмес чондуктун өсүндүсү болсун жана $\Delta x \neq 0$, $|\Delta x| < \delta$. Анда $\Delta y = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$, $\Delta z = z(x_0 + \Delta x) - z(x_0)$ деп белгилеп алалы. Δy өсүндүсү Δx өсүндүсүнөн көз каранды болуп, $f(y)$ функциясынын y_0 чекитиндеги $\Delta z = \Delta f$ өсүндүсүн пайда кылат, б.а.

$\Delta z = \Delta f = f(y_0 + \Delta y) - f(y)$, мында $y_0 = \varphi(x_0)$.

Шарт боюнча $f(y)$ функциясы y_0 чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан

$$\Delta z = \Delta f = f'(y_0)\Delta y + \Delta y \cdot \alpha(\Delta y), \tag{14}$$

формуласын жаза алабыз, мында $\Delta y \to 0$ да $\alpha(\Delta y) \to 0$.

Бул жерде $\alpha(\Delta y)$ функциясы $\Delta y = 0$ маанисинде аныкталбагандыгын эскертели. Бирок Δy өсүндүсү $\Delta x \neq 0$ болсо деле нөлгө айланат. Ошондуктан $\alpha(\Delta y)$ функциясын $\Delta y = 0$ маанисинде кошумча аныктоо керек. Ал үчүн $\alpha(0) = 0$ барабардыгын колдонуу жетиштүү. Анда (14) формула $\Delta y = 0$ маанисинде да орун алат.

Эми (14) барабардыктын эки жагын тен $\Delta x \neq 0$ гө бөлөбүз:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \alpha(\Delta y). \tag{15}$$

Бул (15) барабардыктын сол жагындагы Δz өсүндүсүн, Δx өсүндүсүнө туура келген $z = f(\varphi(x))$ татаал функциянын өсүндүсү катарында карайбыз.

Эгерде $\Delta x \to 0$, анда $\Delta y \to 0$, анткени $y = \varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз жана ошонун негизинде $\alpha(\Delta y) \to 0$. Мындан тышкары $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(y_0)$, себеби $\varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү. Демек, (15) барабардыктын он жагы $\Delta x \to 0$ да $f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$ барабар болгон пределге ээ болот. Ошондуктан (15) барабардыктын сол жагынын предели аныкталат, б.а. $z = f(\varphi(x))$ татаал функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция жана (13) формула орун алат. ●

3-эскертүү. Көбүнчө $f\big(\varphi(x)\big)$ татаал функциясынын дифференцирлөө эрежесин

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x),$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{же} \quad z'_x = z'_y\cdot y'_x$$

түрүндө колдонушат.

Татаал функциянын дифференцирлөө эрежесин ар кандай чектүү сандагы функциялардын композициясына жайылтууга болот. Мисалы, $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ функциялары ирээти менен t_0, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(x_0)$ чекиттеринде дифференцирленүүчү болушса, анда t_0 чекитинде $z=z(y)=z(y(x))=$ $=z(y(x(t)))$ татаал функциясы да дифференцирленүүчү функция болот жана

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

барабардыгы орун алат.

3-мисал. Төмөнкү формулаларды далилдегиле:

$$(shx)' = chx, \tag{16}$$

$$(chx)' = shx, \tag{17}$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2x}, \tag{18}$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}. \tag{19}$$

△ Гиперболалык функциялар (III гл. § 3. 5-п.). каралган. Алар төмөнкү формулалар аркылуу берилет:

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ thx=\frac{shx}{chx},\ cthx=\frac{chx}{shx}.$$

а) Алдыда далилденген 1-жана 3-теоремаларды колдонуп төмөнкүнү жазабыз: $(shx)'=\frac{1}{2}\big(e^x-e^{-x}(-1)\big)=chx.$

Ушул эле сыяктуу (17) формула далилденет.

б) Бөлчөктү дифференцирлөө эрежесин жана (16), (17) формулаларды колдонуп

$$(thx)' = \frac{(shx)' \cdot chx - shx \cdot (chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}$$

барабардыгын алабыз жана мындан (18) формула келип чыгат, себеби $ch^2 x - sh^2 x = 1$. Ушул сыяктуу (19) формуланы далилдесек болот. ▲

4-мисал. Эгерде $a > 0$, $a \neq 1$ болсо, анда

$$\left(log_a |x|\right)' = \frac{1}{xlna}, \quad x \neq 0 \qquad (20)$$

формуласын далилдегиле.

△ а) $x > 0$, анда $|x| = x$ жана $log_a |x| = log_a x$. Бул учурда § 1 де (11) формула далилденген

$$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}, \quad x > 0 \qquad (21)$$

формулага ээ болобуз, б.а. (20) формула $x > 0$ учурунда орун алат.

б) $x < 0$, анда $-x > 0$ жана $log_a |x| = log_a(-x)$. Эми (21) жана татаал функцияны дифференцирлөө эрежесине таянып

$$\left(log_a(-x)\right)' = \frac{1}{(-x)lna}(-1) = \frac{1}{-xlna}$$

формуласын, б.а. (20) $x < 0$ болсо да орун аларын көрсөтө алдык.

Эми (20) формулага $a = e$ десек

$$\left(ln|x|\right)' = \frac{1}{x}, \; x \neq 0 \qquad (22)$$

формуласын алабыз. ▲

Жогоруда далилдегендерди жыйынтыктап элементардык функциялардын туундуларын (§ 1, § 2 ни кара) таблица түрүндө жазалы:

1) $(c)' = 0$, $c - const$.

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$.

$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \boldsymbol{N}, x \in \boldsymbol{R}$.

3) $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}.$

$(e^x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$

4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$

$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0.$

$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0.$

$(\ln |x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0.$

5) $(\sin x)' = \cos x,\ x \in R.$

6) $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in R.$

7) $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in z.$

8) $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in z.$

9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$

10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$

11) $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2},\ |x| \in R.$

12) $(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in R.$

13) $(sh x)' = ch x,\ x \in R.$

14) $(ch x)' = sh x,\ x \in R.$

15) $(th x)' = \frac{1}{ch^2 x},\ x \in R.$

16) $(cth x)' = \frac{1}{sh^2 x},\ x \neq 0.$

5-мисал. Эгерде x чекитинде $\varphi(x)$ дифференцирленүүчү функция болуп жана $\varphi(x) \neq 0$, анда

$$\left(ln|\varphi(x)|\right)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{23}$$

формуласы орун аларын далилдегиле.

$\triangle$ Логарифмалык функциясынын туундусунун формуласын жана 3-теореманы колдонуп (23) формуланы алабыз. Бул формуланын он жагындагы туюнтма $\varphi(x)$ функциясынын *логарифмалык туундусу* деп аталат. $\blacktriangle$

6-мисал. Эгерде $f(x)$ функциясы төмөнкү формулалар аркылуу берилсе, анда $f'(x)$ туундусун тапкыла.

а) $f(x) = sin2x$;

б) $f(x) = e^{-x^2} ln(1 + x^3)$;

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{arcsin(cosx)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

г) $f(x) = arctg\dfrac{x - 1}{x + 1} \cdot 2^{tg^3(sh4x)}$;

$\triangle$ а) $f'(x) = (sin2x)' = 2cos2x$;

б) $f'(x) = -2xe^{-x^2} ln(1 + x^3) + e^{-x^2} \cdot \dfrac{3x^2}{1 + x^2}$;

в) $$f'(x) = \frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} arcsin(cosx) - \sqrt{1 - x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - cos^2x}}(-sinx)}{\left(arcsin(cosx)\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - x^2 - xarcsin(cosx)}{\sqrt{1 - x^2}\left(arcsin(cosx)\right)^2};$$

г) $$f'(x) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x + 1)^2} \cdot 2^{tg^3(sh4x)} + arctg\frac{x - 1}{x + 1} \cdot 2^{tg^3(sh4x)} \times$$

$$\times \ln 2 \cdot 3tg^2(ch4x) \cdot \frac{4sh4x}{\cos^2(sh4x)} = 2^{tg^3(sh4x)} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{12\ln 2 tg^2(sh4x) \cdot c\ln 4x}{\cos^2(s\ln 4x)} \times\right.$$

$$\left.\times\, artg\frac{x-1}{x+1}\right). \blacktriangle$$

7-мисал. Даражалуу-көрсөткүчтүү $z = u(x)^{v(x)}$ функциясынын x чекитиндеги туундусун (мында u, v — дифференцирленүүчү функциялар, $u(x) > 0$ тапкыла.

$\triangle$ $z = e^{v(x)\ln u(x)}$ болгондуктан z функциясы дифференцирленүүчү функция, себеби ал дифференцирленүүчү функциялардын суперпозициясынан турат. Анда $\ln z \equiv v(x)\ln u(x)$ бирдейлигин дифференцирлесек $\frac{z'}{z} = v'\ln u + u\frac{u'}{v}$, мындан $z' = z\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right)$ же

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \qquad (24)$$

формуласына ээ болобуз. $\blacktriangle$

Алынган (24) формула эки кошулуучудан турат. Биринчиси корсөткүчтүү $u^{v(x)}$ (негизи u турактуу чоңдук деп) функциянын туундусуна барабар; экинчиси даражалуу $\left(u^{(x)}\right)^v$ (даража v турактуу деп эсептеп) функциянын туундусун берет.

8-мисал. Туундулар $f'(x)$, $g'(x)$ тапкыла, эгерде

а) $f(x) = x^x$; б) $g(x) = x^{x^x}$.

$\triangle$ а) Алдынкы (24) формула боюнча

$f'(x) = x^x \ln x + x \cdot x^{x-1}$, б. а. $f'(x) = (x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

б) Мында $g(x) = x^{f(x)}$ деп дагы эле (24) формуланы колдонобуз, анда

$$g'(x) = g(x)\ln x \cdot f'(x) + f(x)x^{f(x)-1},$$

же

$$\left(x^{x^x}\right) = x^{x^x+x-1}\left(x\ln x(\ln x + 1) + 1\right). \blacktriangle$$

9-мисал. Төмөнкү формулаларды далилдегиле:

$$(arshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in R, \tag{25}$$

$$(archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \; |x| > 1, \tag{26}$$

$$(arthx)' = \frac{1}{1-x^2}, \; |x| < 1, \tag{27}$$

$\triangle$ Тескери гиперболалык функцияларга (III гл. § 3) мурда бир азыраак токтолуп кеткенбиз. Алар төмөнкү формулалар аркылуу берилет:

$$arshx = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \; x \in R,$$

$$archx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \; |x| > 1,$$

$$artgx = \frac{1}{2} ln\frac{1+x}{1-x}, \; |x| < 1$$

Ошондуктан

$$(arshx)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

(25) формула далилденди. Ушул сыяктуу (26) формула далилденет. Акырында

$$(arthx)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)', \text{ ал эми } \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \left(-1 - \frac{2}{x-1}\right) = \frac{2}{(x-1)^2},$$

мындан

$$(arthx)' = \frac{1}{1-x^2}. \; \blacktriangle$$

10-мисал. Бизге $(-a, a)$ интервалында дифференцирленүүчү $f(x)$ функциясы берилсин. Эгерде $f(x)$ жуп функция болсо, анын туундусу $f'(x)$ так функция, ал эми $f(x)$ так функция болсо, анын туундусу $f'(x)$ жуп функция болушун далилдегиле.

△ Берилген $f(x)$ жуп функция болсун, анда

$$f(-x) \equiv f(x), \ x \in (-a, a).$$

Бул бирдейликти дифференциялап

$$-f'(-x) = f'(x), \ x \in (-a, a)$$

барабардыгын алабыз. Бул болсо $f'(x)$ так функция экендигин көрсөтөт. $f(x)$ функциясы так эмес болгон учур деле ушул сыяктуу.

3. Параметрдик жана айкын эмес түрдө берилген функцияларды дифференцирлөө.

а) Параметрдик түрүндө берилген функция. Биз $x(t)$ жана $y(t)$ функциялар $[t_0 - \delta, \ t_0 + \delta]$ аралыгында аткарылсын жана да $x(t)$ үзгүлтүксүз жана монотондуу (мисалы анык өсүүчү) функция болсун дейли. Анда $[\alpha, \beta]$ ($\alpha = x(t_0 - \delta)$, $\beta = x(t_0 + \delta)$) аралыгында $x = x(t)$ функциясына тескери $t = t(x)$ функция аныкталат да үзгүлтүксүз жана анык өсүүчү болот. Мындан тышкары $x'(t_0)$ жана $y'(t_0)$ туундулар аныкталсын деген кошумча шарт орун алсын (мындан ары $x'(t_0)$ жана $y'(t_0)$ жазуунун ордуна x'_t, y'_t жазууну колдонобуз). Анда татаал $y = y(t) = y\big(t(x)\big)$ функция x аргументи боюнча $x_0 = x(t_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү функция болуп жана

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{28}$$

формуласы орун алат.

○ Чынында эле татаал функцияны $y = y\big(t(x)\big)$ дифференцирлөө эрежеси боюнча

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t \cdot t'_x$$

формуласына ээ болобуз. Ал эми тескери функцияны дифференцирлөө эрежеси боюнча

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}$$

формуласын эске алсак, анда (28) формула далилденген болот. ◐

11-мисал. Эгерде $x = ln(1+e^{2t})$, $y = arctge^t$ болсо, анда $\frac{dy}{dx}$ туундуну тапкыла.

△ $x'_t = \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$, $y'_t = \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$ болгондуктан, (28) формула боюнча $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{1+e^{2t}} \cdot \frac{1+e^{2t}}{2e^{2t}}$, б.а. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-t}}{2}$. ▲

б) Айкын эмес түрдө берилген функция. Эгерде дифференцирленүүчү $y = f(x)$ функциясы айкын эмес $F(x, y) = 0$ теңдемеси менен берилсе, анда $F(x, f(x)) \equiv 0$ бирдейлигине татаал функцияны дифференцирлөө эрежесин колдонуп $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ туундусун аныктоого болот. Айкын эмес функциянын аныкталышы жана анын дифференцирлениши толук V гл., § 8 де жазылган.

12-мисал. Эллипстин

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{29}$$

кандайдыр бир анын $M_0(x_0, y_0)$, $(|x_0| < a$ чекитине жүргүзүлгөн жанымасынын теңдемесин жазгыла.

△ M_0 чекити $(-a, a)$ интервалында (29) теңдеме менен берилген дифференцирленүүчү эки айкын эмес функциялардын бирин бир маанилүү аныктайт. Бул функцияны $f(x)$ менен белгилейли. Аны айкын түрдө да жазууга болот, ал үчүн (29) теңдемени y ке карата чыгаруу зарыл. Алдыңкы (29) бирдейликти, $y = f(x)$ деп, дифференцирлеп

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \tag{30}$$

барабардыгын алабыз. Бул (30) теңдемеге x жана y ордуна ирети менен x_0 жана y_0 коюп, эллипстин M_0 чекитине жүргүзүлгөн жанымасынын бурчтук коэффициентин

11—1238

$$к = y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0},$$

табабыз. Демек, анда жаныманын теңдемеси

$$y - y_0 = к(x - x_0) \text{ же } y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

түрүндө жазылат. Бул теңдемени дагы башкача жазсак болот:

$$\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}, \text{ же } \frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1,$$

себеби

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \ \blacktriangle$$

§ 3. ФУНКЦИЯНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Аныктама. *Эгерде $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинин δ аймагында аныкталса, ал эми $y = f(x)$ функциясынын Δy өсүндүсүн x_0 чекитинде*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x), \tag{1}$$

түрүндө жазылса, мында $A = A(x_0)$ Δx тен көз каранды эмес, $\Delta x \to 0$ кезинде $\varepsilon(\Delta x) \to 0$, анда $f(x)$ функциянын x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция дейбиз, ал эми $A \cdot \Delta x$ көбөйтүндүсүн x_0 чекитиндеги дифференциалы деп жана аны $df(x_0)$ же dy аркылуу белгилейбиз. Ошентип, $\Delta x \to 0$ кезинде

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \tag{2}$$

мында

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{3}$$

Функциянын өсүндүсүнүн $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $x_0 + \Delta x$ маани $f(x)$ функциясынын аныкталуу областында жата тургандай болгон Δx үчүн гана карайбыз, мындай учурда dy ар кандай Δx үчүн аныкталган.

Теорема. *$y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция болуш үчүн бул функциянын x_0 чекитинде туундуга ээ болушу зарыл жана жетиштүү. Дифференциал жана туунду*

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{4}$$

барабардыгы менен байланышып турат.

○ Эгерде $y=f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция болсо, анда (1) шарты орун алат, ошондуктан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x) \tag{5}$$

формуласына ээ болобуз, мында $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$ да $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ умтулат. Демек $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$ предели жашайт б.а. $f'(x_0) = A$.

Тескерисинче $f'(x)$ жашасын, анда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{6}$$

барабардыгы орун алат жана ошондуктан (1) шарты да орун алат. Демек $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болуп, (1) жана (3) формулаларындагы $A = f'(x_0)$ барабар, жана дифференциал (4) түрүндө жазылат. ○

Функциянын туундусунун берилген чекитте жашашы ушул эле чекитте функциянын дифферецирлениши менен тең күчтүү. Функция (a, b) интервалдын ар бир чекитинде туундуга ээ болсо, анда ал функцияны (a, b) интервалында дифференцирленүүчү деп аташат. Эгерде $f(x)$ функциясы (a, b) да дифференцирленүүчү болсо жана $f'_+(a)$ жана $f'_-(a)$ жашаса, анда ал функциянын $[a, b]$ сегментинде дифференцирленүүчү функция дейбиз.

1-эскертүү. Эгерде $f'(x_0) \neq 0$ болсо анда (2), (4) барабардыгынан $\Delta x \to 0$ кезинде $\Delta y \neq 0$ болору ачык жана $\Delta x \to 0$ кезинде $\Delta y \approx dy$. Бул учурда функциянын өсүндүсүнүн негизги сызыктуу бөлүгүн функциянын дифференциалын берет. Функциянын дифференциалы dy өсүндүсүнөн Δy, Δx ке карата жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдукка айырмаланат.

2-эскертүү. Аргументтин Δx өсүндүсүн көпчүлүк учурда dx символу аркылуу белгилеп, аргументтин дифференциалы деп аталат. Ошондуктан (4) формуланы

11*

$$dy = f'(x_0)dx \tag{7}$$

түрүндө жазабыз. (7) формула боюнча функциянын туундусун билип анын дифференциалын табабыз. Мисал үчүн,

$$d(\sin x) = \cos dx, \quad d(e^x) = e^x dx.$$

Алдыңкы (7) туюнтмасынан

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \tag{8}$$

формуласын алабыз. Ошондуктан (8) формула боюнча функциянын туундусун, функциянын dy дифференциалынын аргументтин dx дифференциалына болгон катышы деп айтабыз.

1. Дифференциалды жакындаштырып эсептөө үчүн колдонуу.

Алдыдагы (2) формуладагы $o(\Delta x)$ мүчөсүн жазбай калтырсак, б.а. функциянын Δy өсүндүсүн анын дифференциалына алмаштырып, жакындаштырылган

$$dy \approx f'(x_0)\Delta x$$

же

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{9}$$

барабардыкка ээ болобуз. Бул (9) формула боюнча функциянын $f(x_0 + \Delta x)$ болжолдуу маанисин, Δx кичине болгондо, $f(x_0)$ жана $f'(x_0)$ маанилери аркылуу табабыз.

1-мисал. $y = \sqrt[4]{x}$ функциясынын болжолдуу маанисин x=90 чекитинде тапкыла:

$\triangle$ (9) формуладагы $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$ деп алсак, анда $f(81) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(81) = \frac{1}{4 \cdot 3^3}$ болгондуктан

$$\sqrt[4]{90} \approx 3 + \frac{1}{12} = 3{,}083. \blacktriangle$$

Эгерде (9) формулада $x_0 = 0$ болсо, анда

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \tag{10}$$

болжолдуу формуласына ээ болобуз. Өз учурунда (10) формуласын пайдаланып

$$\sin x \approx x,\ \ln(1+x) \approx x,\ tgx \approx x,$$

$$(1+x)^m \approx mx,\ arctgx \approx x,\ e^x \approx 1+x$$

ж.б. ар кандай анализдеги маселелерди чечкенде кеңири колдонулуучу болжолдуу формулаларды алабыз.

2. Дифференциалдоонун эрежелери жана негизги формулалары.

1-теорема. *Эгерде f жана g функциядары x чекитинде дифференцирленүүчү функциялар болушса, анда ушул чекитте $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ жана $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x) \neq 0\right)$ функциялары төмөнкүдөй дифференцирленүүчү болушат:*

1) $d\left(f(x) \pm g(x)\right) = df(x) \pm dg(x)$,

2) $d\left(f(x)\cdot g(x)\right) = df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot dg(x)$,

3) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\ df(x) - f(x)\ dg(x)}{g^2(x)}$.

○ Бул формулаларды (7) формуланы жана туунду алуунун эрежелерин пайдаланып оңой эле далилдейбиз. 2)-учуруна токтололу:

$$d\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' dx = \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx =$$
$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x).$$

Калган 1) жана 3) учурлар ушуга окшош эле далилденет. ●
Функциянын dy дифференциалы, y' туундуну dx көбөйткөнгө барабар экенин эске алсак, анда элементардык функциялардын туундуларынын таблицасын пайдаланып төмөнкү дифференциалдын таблицасын түзөбүз:

1) $d(c) = 0$,

2) $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$,

3) $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$,

4) $d(a^x) = a^x \ln a dx$,

5) $d(e^x) = e^x dx$,

6) $d(\log_a^x) = \frac{dx}{x\ln a}$,

7) $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$,

8) $d(\sin x) = \cos x dx$,

9) $d(\cos x) = -\sin dx$,

10) $d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

11) $d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$,

12) $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

13) $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

14) $d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$,

15) $d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

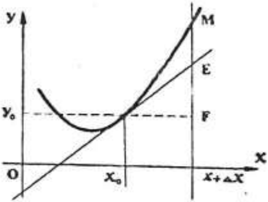
3. Дифференциалдын геометриялык мааниси.

Эгерде $y = f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде дифференцирленүүчү функция болсо, анда функциянын графигине (x_0, y_0) чекитине жүргүзүлгөн, теңдемеси $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ болгон, l_0 жаныма сызык жашайт. $M(x_0 + \Delta x)$, $f(x_0 + \Delta x)$ функциянын графигинин абсциссасы $x_0 + \Delta x$ болгон чекити болсун. $x = x_0 + \Delta x$ түз сызыгынын l_0 жаныма жана $y_0 = f(x_0)$ түз сызыгы менен кесилишинин чекиттерин E жана F менен белгилейли. Анда $F(x_0 + \Delta x, y_0)$, $E(x_0 + \Delta x, y_0 + f'(x_0)\Delta x)$ болушат. E жана F чекиттеринин ординатасынын айырмасы $f'(x_0) \cdot \Delta x$ барабар, б.а. функциясынын $x = x_0$ чекитиндеги дифференциалы dy барабар. Ошентип, $y = f(x)$ функциянын $x = x_0$ маанисиндеги дифференциалы, бул функциянын графигине x_0 чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын x аргументи x_0 дөн $x_0 + \Delta x$ ке чейин өзгөрүлгөндүгү анын ординатасынын өсүндүсүнө барабар. Ал эми $ME = \Delta y$, $EF = dy$ болгондуктан, (2) формуласынын негизинде $\Delta x \to 0$ кезде $ME = o(\Delta x)$ берет (28-чийме).

§ 4. ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ТУУНДУЛАР ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАР

1. Жогорку тартиптеги туунду.

Берилген $f(x)$ функциясы (a, b) интервалынын бардык чекиттеринде туундуга ээ болсун. Эгерде $f'(x)$ функциясы $x_0 \in (a, b)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын туундусу $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде *экинчи туунду* же *экинчи тартиптеги туунду* деп аталат жана $f''(x_0)$, $f^{(2)}(x_0)$, $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $f''_{x^2}(x_0)$ аркылуу белгилешет. Туундунун аныктамасы боюнча



28-чийме

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

функциясын экинчи тартиптеги туунду дейбиз. $f'(x)$ функциясын биринчи туунду же биринчи тартиптеги туунду деп, ал эми функциянын нөлүнчү тартиптеги туундусу $f^{(0)}(x)$ үчүн берилген функциянын өзүн $f(x)$ ты түшүнөбүз, б.а.

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Экинчи туундунун физикалык маанисин карайбыз. Материалдык чекит кыймыл башталгандан кийин t убакытында $s = s(t)$ жолун басып өтөт. Анда $v = \frac{ds}{dt}$ материалдык чекиттин t моментиндеги ылдамдык.

$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{s'(t + \Delta t) - s'(t)}{\Delta t}$ катышын t дан $t + \Delta t$ га чейинки убакыттагы орточо ылдамдануну берет. Ал эми анын $\Delta t \to 0$ кезиндеги предели t убакыттагы ылдамдануусу $s''(t)$ деп аталат. Эгерде функциянын биринчи, экинчи тартиптеги туундулары бар болсо, анын улам кийинки 3-, 4- ж.б. тартиптеги туундулары жогоркуга окшош эле аныкталат. Жалпы учурда $y = y(x)$ функциясынын n- тартиптеги туундусу деп, анын $n - 1$-тартиптеги туундусунун туундусун айтабыз жана аны символдук түрдө $y^{(n)}$ аркылуу белгилейбиз. Жогорку тартиптеги туундуларды төмөнкүчө белгилешет.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

1-мисал. Эгерде а) $y = sin^2x$; б) $y = e-x^2$; в) $y = ln(x + \sqrt{x^2+1})$; г) $y = |x|^3$ болсо y'' тапкыла.

Δ а) $y' = sin\ 2\ x$, $y'' = 2\ cos\ 2x$; б) $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x} \times (2x^2-1)$;

в) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$;

г) Эгерде $x \neq 0$, анда

$$y' = \begin{cases} 3x^2, \text{ эгерде } x > 0, \\ -3x^2, \text{ эгерде } x < 0, \end{cases}$$

ал эми

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^3}{x} = 0.$$

Ошентип

$$y' = 3x^2\ sign\ x,\ y'' = 6|x|. \ \blacktriangle$$

Кээ бир функциялардын n-туундуларын табалы. Функциянын n-тартиптеги туундусун эсептөө үчүн n-ден мурунку тартиптегилерин эсептеш керек. Бирок кээ бир учурларда n-туунду үчүн жалпы туюнтмасын табууга болот.

1) Көрсөткүчтүү функция. $y = x^{\alpha}$, мында $\alpha \in R$. Ирети менен туундуларын эсептейли:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)\ x^{\alpha-2},\ y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \dots$$
$$\dots,\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-(n-1))\ x^{\alpha-n}. \qquad (2)$$

Бул (2) формуланы далилдеш үчүн толук математикалык индукция методун колдонолу, б.а. n үчүн орун алсын дейли, анда

$$(y^{(n)})^1 = y^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n+1)(x^{\alpha-n})^1 =$$
$$= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{\alpha-n-1}.$$

$(n+1)$ үчүн да туура. Демек (2) формула баардык $n \in N$ үчүн орун аларын корсоттүк. Жеке учурда $\alpha=-1$ болсо, анда

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}. \qquad (3)$$

2) $y = \ln x$ функциясынын n-туундусун (3) аркылуу табабыз:

$$y' = \frac{1}{x},\ y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \qquad (4)$$

3) $y=a^x$, $0<a<\infty$, $x \in (-\infty, \infty)$ корсоткүчтүү функция берилсин.

$$y' = a^x \ln a,\ y'' = a^x \ln^2 a, \dots,\ y^{(n)} = a^x \ln^n a, \qquad (5)$$

жеке учурда $y = e^x$ болсо, анда $y^{(n)} = e^x$. (6)

4) $y = \sin x$ берилсин.

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5) $y = \cos x$ берилсин.

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

6) $y = \operatorname{arctg} x$ функциясын карайлы.

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y'' = [-\sin y \sin (y + \frac{\pi}{2}) + \cos y \cos (y + \frac{\pi}{2})]\ y' =$$

$$= \cos 2y \cos (2y + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 y \sin 2 (y + \frac{\pi}{2}).$$

. . . .

$$y^n = (n-1)! \cos^n y \sin n (y + \frac{\pi}{2}),\ n \in \boldsymbol{N}.$$

2. Лейбництин формуласы.

Эки $u = u(x)$ жана $v = v(x)$функциялары жогорку тартиптеги туундуга ээ болушса алардын кебөйтүндүсүнүн $u(x) \cdot v(x)$ тын n-тартиптеги туундусун табыш үчүн Лейбництин формуласы орун алат

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa\ u^{(n-\kappa)}\ v^{(\kappa)}. \quad (7)$$

Бул (7) формуланын далилдөөсүн толук математикалык индукция методу менен жүргүзөлү:

$$y' = (uv)' = u' \cdot v + u \cdot v',\ y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',\ \ldots .$$

Ошентип (7) формула n үчүн орун алса, анын $n+1$ дагы орун [illegible]арын көрсөтөлү:

$$y^{(n+1)} = \left(\sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa\ u^{(n-\kappa)} v^{(\kappa)} \right)' = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa (u^{(n+1-\kappa)} v^{(\kappa)} + u^{(n-\kappa)} v^{(\kappa+1)}) =$$

$$= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_n^\kappa\ u^{(n+1-\kappa)} v^{(\kappa)} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_n^{\kappa-1} u^{(n+1-\kappa)} v^{(\kappa)} +$$

$$+ u^{(0)} v^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{\kappa=1}^{n} (C_n^\kappa +$$

$$+ C_n^{\kappa-1}) \cdot u^{(n+1-\kappa)} v^{(\kappa)} = \sum_{\kappa=0}^{n+1} C_{n+1}^\kappa u^{(n+1-\kappa)} v^{(\kappa)}.$$

Мында $C_n^\kappa + C_n^{\kappa-1} = C_{n+1}^\kappa$ формуласын пайдаландык.

2-мисал. $u = e^x$, $v = \sin x$ үчүн $(u \cdot v)^{(n)}$ — ?

$$\Delta\ (e^x \sin x)^{(n)} = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^{\kappa}\, e^x \sin\left(x + \kappa \cdot \pi/2\right). \ \blacktriangle$$

3. Жогорку тартиптеги дифференциалдар.

Биринчи тартиптеги дифференциалдын дифференциалын *экинчи дифференциал же экинчи тартиптеги дифференциал деп айтабыз* жана төмөнкүчө жазабыз:

$$d^2y = d\,(dy).$$

Ал эми n-тартиптеги дифференциал деп $y = f(x)$ функциясынын $(n-1)$-тартиптеги дифференциалынын дифференциалың айтабыз.

$$d^n y = d\,(d^{n-1}y). \tag{8}$$

Жогорку тартиптеги дифференциалды

$$d^2 f(x_0),\ d^3 f(x_0), \ldots,\ d^n f(x_0)$$

түрүндө да жазууга болот. Жогорку тартиптеги дифференциалдарды эсептегенде dx каалагандай турактуу чоңдук жана x тен көз каранды болбогонун эстен чыгарбаш керек. Бул учурда

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = dy'dx = (y''dx)\,dx = y''dx^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(y''dx^2) = dy''dx^2 = (y'''dx)\,dx^2 = y'''dx^3.$$

. . . .

$$d^n y = y^{(n)} dx^n. \tag{9}$$

Бул (9) формула математикалык индукция методу менен оңой эле далилденет. Ал формуланы

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

бөлчок катарында, б.а. $y = f(x)$ функциясынын n-тартиптеги туундусу анын n-тартиптеги дифференциалынын аргументин дифференциалынын n-даражасына болгон катышына барабар.

4. Параметрдик түрдө берилген татаал жана тескери функциялардын жогорку тартиптеги туундулары.

Айрым учурда ар кандай маселелерди чечкенде функциянын параметрдик (§ 2. 3-п.)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

түрдө берүү максатка ылайыктуу. Ушул параметрден көз каранды болгон функциянын жогорку тартиптеги туундуларын карайбыз. $y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \ldots, y^{(n)}_{x^n}$. Бул туундуларды аныкташ үчүн $x(t)$, $y(t)$ функциялары

$$x^{(\kappa)}(t),\ y^{(\kappa)}(t),\ (\kappa = 2, 3, \ldots, n)$$

тартиптеги туундуларга ээ болушсун. Эми жогорку тартиптеги $y^{(\kappa)}_{x^\kappa}$ $(\kappa = 2, 3, \ldots, n)$ туундулардын туюнтмаларын, каалагандай t параметри боюнча алынган $x(t)$, $y(t)$ функцияларынын туундулары аркылуу жазууга болорун көрсөтөлү.

Биз төмөндө дифференциалдарды t боюнча алынат деп эсептейбиз, анда

$$y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{dx^3}$$

же

$$y''_{x^2} = \frac{dx\, d^2y - d^2x\, dy}{dx^3}. \tag{10}$$

Өз учурунда

$$y'''_{x^3} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{dx\,(dx\, d^3y - d^3x\, dy) - 3\, d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x\, dy)}{dx^5},$$

б.а.

$$y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dx\,(dx\, d^3y - d^3x\, dy) - 3\, d^2x\,(dx\, d^2y - d^2x\, dy)}{dx^5}. \tag{11}$$

Каралган эрежени колдонуп $y^{(4)}_{x^4},\dots,y^{(n)}_{x^n}$ тартиптеги туундуларын эсептөөгө болот. Акырында (2), (3) формулаларынын алымын жана бөлүмүн ирети менен dx^2, dt^3 бөлсөк

$$y''_{x^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{(x'_t)^3},$$

же болбосо

$$y''_{x^2}=\frac{x'_t\,y''_{t^2}-x''_{t^2}\,y'_t}{(x'_t)^3} \tag{12}$$

жогоркуга окшош эле

$$y'''_{x^3}=\frac{x'_t\,(x'_t\,y'''_{t^3}-y'_t\,x'''_{t^3})-3x''_{t^2}\,(x'_t\,y''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{(x'_t)^5} \tag{13}$$

ж.б. формулаларды жазабыз.

3-мисал. $x=a\ cost$, $y\ sint$ болушса $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$ тапкыла.

△ $\quad x'_t=-a\ sint,\quad y'_t=b\ cost,$

$\quad x''_{t^2}=-a\ cost,\quad y''_{t^2}=-b\ sint,$

$\quad x'''_{t^3}=a\ sint,\quad y'''_{t^3}=-b\ cost.$

Анда

$$y'_x=\frac{b}{a}ctgt,\ \ y''_{x^2}=-\frac{ab}{a^3sin^3t},\ \ y'''_{x^3}=\frac{3\,b\,cost}{a^3sin^3t}.$$ ▲

Эгерде $y=f(u)$ жана $u=\varphi(x)$ берилсе. Бул функциялар биринчи тартиптеги туундуларга ээ болушса жана $u=\varphi(x)$ функциясынын маанилери $y=f(u)$ функциясынын аныктоо областында жатышса, анда $F(x)=f(\varphi(x))$ татаал функциядагы туундуга ээ болот жана

$$F'(x)=f'(\varphi(x))\,\varphi'(x) \tag{14}$$

формуласы аркылуу эсептелинет (§ 2. 2-п.). Ал эми, эгерде $f(u)$ жана $\varphi(x)$ функциялары экинчи тартиптеги туундуларга ээ болушса, анда (14) барабардыгын дифференцирлеп төмөнкүгө ээ болобуз.

$$F''(x)=f''(\varphi(x))\cdot(\varphi'(x))^2+f'(\varphi(x))\,\varphi''(x). \qquad (15)$$

Ушул сыяктуу $F(x)=f(\varphi(x))$ үч ирет дифференцирленүүчү татаал функция болсо, анда анын үчүнчү туундусун (15) формуланы пайдаланып аныктайбыз:

$$F'''(x)=f'''(\varphi(x))\cdot(\varphi'(x))^3+2f''(\varphi(x))\,\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)+$$
$$+f''(\varphi(x))\,\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)+f'(\varphi(x))\cdot\varphi'''(x)$$

же болбосо

$$F'''(x)=f'''(\varphi(x))(\varphi'(x))^3+3f''(\varphi(x))\,\varphi'(x)\cdot\varphi''(x)+$$
$$+f'(\varphi(x))\cdot\varphi'''(x). \qquad (16)$$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРЛЕНҮҮЧҮ ФУНКЦИЯЛАР ҮЧҮН НЕГИЗГИ ТЕОРЕМАЛАР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

Эгерде $\delta>0$ саны жашап $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин δ аймагында, б.а. $u_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ көптүгүндө аныкталсын жана бардык $x\in u_\delta(x_0)$ үчүн

$$f(x)\geqslant f(x_0) \qquad (1)$$

барабарсыздыгы аткарылсын, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдуу минимумга ээ болот деп айтабыз.

Жогоркуга окшош эле $\delta>0$ саны жашап, бардык $x\in u_\delta(x_0)$ үчүн

$$f(x)\leqslant f(x_0) \qquad (2)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдуу максимумга ээ болот дешет. Локалдуу минимум жана максимумду бириктирип локалдуу экстремум деп айтабыз.

1. Ферманын теоремасы.

Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдуу экстремумга ээ болуп жана ушул чекитте дифференцирленүүчү функция болсо, анда

$$f'(x_0)=0. \qquad (3)$$

○ Аныктык үчүн $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде локалдуу минимумга ээ болсун дейлик. Анда, (1) шартынын негизинде бардык $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ үчүн

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0 \tag{4}$$

барабарсыздыгы орун алат.

Эгерде $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ жатса, анда $x - x_0 \leqslant 0$ жана (4) шартынын негизинде

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \tag{5}$$

ал эми $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ жатса, анда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0. \tag{6}$$

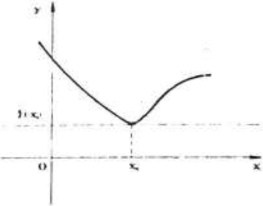
Шарт боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан (5) барабарсыздыгына $x \to x_0 - 0$ кезинде пределге өтсөк

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \leqslant 0 \tag{7}$$

Ушуга окшош эле (6) барабарсыздыгына $x \to x_0 - 0$ кезинде пределге өтсөк

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0) \geqslant 0. \tag{8}$$

Алынган (7) жана (8) барабарсыздыктарынан $f'(x_0) = 0$ болору келип чыгат.



29-чийме

Эскертүү. Ферманын теоремасына геометриялык талкуу жүргүзүүгө болот. $y = f(x)$ функциясынын графигине локалдуу экстремум чекитинде $(x_0, f(x_0))$ жүргүзүлгөн жаныма ox огуна жарыш болот (29-чийме).

2.Туундунун нөлү жөнүндөгү Роллдун теоремасы.

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана аралыктын учтарында бирдей мааниге

$$f(a) = f(b), \tag{9}$$

ээ болуп, (a, b) аралыгында дифференцирленүүчү функция болсо, анда $\xi \in (a, b)$ чекити табылып ушул чекитте функциянын туундусу нөлгө айланат,

$$f'(\xi) = 0. \tag{10}$$

○ Функциясынын $[a, b]$ аралыгында накта жогорку жана накта төмөнкү чекиттерин ирети менен $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ аркылуу белгилейли. Вейерштрасстын теоремасы (III гл. § 2, 4-п.), 2) боюнча $[a, b]$ кесиндиден C_1, C_2 чекиттери табылып $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$ шарттары орун алышат. Эгерде $m = M$ болсо, анда $f(x) = const$ жана ξ үчүн (a, b) интервалынын каалагандай чекитин алууга болот.

$$\xi \in (a, b), \ f'(\xi) = 0.$$

Эгерде $m \neq M$ болсо, анда $m < M$ жана $f(c_1) < f(c_2)$ теореманын (9) шарты боюнча C_1 жана C_2 чекиттеринин бири эң жок дегенде $[a, b]$ кесиндисинин ичинде жатат, анык-тык үчүн $C_1 \in (a, b)$. Анда $\delta > 0$ саны жашап $u_\delta(c_1) \subset (a, b)$ шарты орун алат. Бардык $x \in u_\delta(c_1)$ үчүн $f(x) \geqslant f(c_1) = m$ шарты орун алгандыктан Ферманын теоремасы боюнча $f'(C_1) = 0$, б.а. (10) шарты $\xi = C_1$ болгондо аткарылды. $C_2 \in (a, b)$ болгон учур жогоркуга окшош эле каралат. ●

Роллдун теоремасын кыскача төмөнкүчө берүүгө болот. Дифференцирленүүчү функция бирдей мааниге ээ болуучу эки чекиттердин ичинен, бул функциянын туундусунун эң жок дегенде бир нөлү табылат. Ал эми $f(a) = f(b) = 0$ болсо, анда дифференцирленүүчү функциянын эки нөлүнүн ичинде анын туундусунун эң жок дегенде бир нөлү жатат.

1-мисал. [−2; 2] кесиндисинде : а) $f(x)=\begin{cases}-x, & -2<x<2,\\ 2, & x=2;\end{cases}$

б) $f(x)=2-|x|$; в) $f(x)=x$ функцияларын карайлы. Анда үч учурда тең туундусу нөлгө айлануучу $f'(\xi)=0$, $\xi\in(-2,2)$ чекити табылбайт, анткени а), б) жана в) функциялары ирети менен үзгүлтүктүү, туундусу жашабайт жана $f(-2)=f(2)$, б.а. бардык учурда Роллдун теоремасы орун албайт.

3. Лагранждын теоремасы.

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана (a, b) интервалында дифференцирленүүчү болсо, анда ушул интервалда эң жок дегенде бир чекит табылып

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{11}$$

барабарсыздыгы орун алат.

○ Төмөнкү жардамчы $\varphi(x)=f(x)+\lambda x$ функцияны карайлы жана белгисиз λ санын $\varphi(a)=\varphi(b)$ шартынан, б.а. $f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$ барабардыгынан аныктайбыз.

Анда

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{12}$$

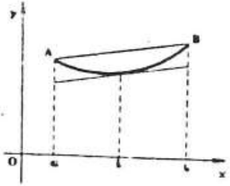
Эми $\varphi(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, (a, b) интервалында дифференцирленүүчү жана интервалдын учтарында бирдей мааниге ээ болот. Ошондуктан Ролдун теоремасынын негизинде $\xi\in(a, b)$ чекити табылат, $\varphi'(\xi)=$ $=f'(\xi)+\lambda=0$.

Мында (12) шартты пайдаланып

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{13}$$

барабардыгын алабыз.

1-эскертүү. (a, b) интервалында ξ чекити жашап $y=f(x)$ функциясынын графигине $(\xi, f(\xi))$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма $A(a, f(a))$ жана $B(b, f(b))$ чекитте-



30 чийме

рин туташтыруучу кесүүчү сызыкка жарыш болот деп, бул теоремага геометриялык талкуу жүргүзөбүз (30-чийме).

2-эскертүү. $x_0 \in [a, b]$ жана $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ болсун. $f(x)$ функциясына $[x_0, x_0 + \Delta x]$ кесиндисине Лагранждын теоремасын колдонсок

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot \Delta x, \tag{14}$$

мында $\xi \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. Эгерде $\Delta x > 0$ болсо, анда $0 < \xi - x_0 < \Delta x$, ошондуктан $0 < (\xi - x_0)/\Delta x < 1$. Ал эми $\theta = (\xi - x_0)/\Delta x$ десек, анда

$$\xi = x_0 + \theta \Delta x, \quad (0 < \theta < 1). \tag{15}$$

Жогоркуга окшош эле $\Delta x < 0$, анда $0 < x_0 - \xi < |\Delta x|$, ошондуктан $0 < -(x_0 - \xi)/\Delta x < 1$. $\theta = -(x_0 - \xi)/\Delta x = (\xi - x_0)/\Delta x$ деп белгилесек, дагы эле (15) барабардыкты алабыз. Ошондуктан (14) барабардыгын төмөнкүчө жазабыз:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x, \ (0 < \theta < 1). \tag{16}$$

Бул (16) барабардыгын Лагранждын чектелген өсүндүсүнүн формуласы деп аташат. Ал дифференциалдын аныктамасында алынган болжолдуу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

формулага салыштырганда функциянын өсүндүсү үчүн так туюнтманы берет.

1-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында дифференцирленүүчү функция болсо жана баардык $x \in (a, b)$ үчүн $f'(x) = 0$, анда $f(x) = C-const$, $x \in (a, b)$.*

○ (a, b) интервалында x_0 турактуу, ал эми x өзгөрүлмөлүү чекиттер болсун. $f(x)$ функциясына $[x_0, x]$ аралыгында Лагранждын теоремасын колдонсок

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

мында $\xi \in (a, b)$; $f'(\xi) = 0$, ошондуктан $f(x) = f(x_0) = C$. ●

2-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз, (a, b) интервалында дифференцирленүүчү жана баардык $x \in (a, b)$ үчүн $f'(x) = k-const$ барабардыгы аткарылса, анда $f(x)$ сызыктуу функция $f(x) = kx + b$, $x \in [a, b]$ болот.*

○ $f(x)$ функциясына $[a, x]$ аралыгында Лагранждын теоремасын колдонсок $f(x) - f(a) = \kappa(x - a)$, мындан $f(x) = \kappa x + b$,

$$b = f(a) - \kappa \cdot a. \quad ●$$

3-натыйжа. *Эгерде $f(x)$ функциясы $x_0 \in (a, b)$ чекитинен башка (a, b) аралыктын чекиттеринде дифференцирленүүчү жана x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болсун жана чектелген же чексиз предел*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = A \tag{17}$$

жашаса, анда x_0 чекитинде сол жаккы туунду жашайт жана

$$f'(x_0 - 0) = A. \tag{18}$$

Ушуга окшош эле эгерде

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = B, \tag{19}$$

жашаса, анда

$$f'(x_0 + 0) = B. \tag{20}$$

○ Δx өсүндүсүнүн $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ шарты аткарылгандай алалык. Анда (16) барабардыгын

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta\Delta x), \quad 0 < \theta < 1, \tag{21}$$

түрүндө жазабыз. Эгерде (17) предели жашаса, б.а.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0 + \Delta x) = A, \tag{22}$$

анда (21) оң жагы A га барабар болгон пределге ээ болот. Ошондуктан (21) сол жагы да пределге ээ болот да (18) барабардыгы келип чыгат. ●

$f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция болсун, анда

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0). \tag{23}$$

Эгерде (17) жана (19) пределдери жашашып жана чектелген болушса, анда (18), (20) жана (23) барабардыктарынан

12*

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0)$$

келип чыгат.

Бул болсо, эгерде $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында дифференцирленүүчү болсо, анда анын туундусу $f'(x)$ биринчи типтеги үзүлүү чекитине ээ болбойт. Башкача айтканда ар бир $x_0\in(a, b)$ чекити функциясынын үзгүлтүксүз чекити же экинчи тартиптеги үзүлүү чекити болот. ○

4-натыйжа. *Эгерде $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$ функциялары $x\geqslant x_0$ болгондо дифференцирленсе жана $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ шарттарын канааттандырса, анда $x > x_0$ болгондо $\varphi(x) > \psi(x)$ болот.*

○ Лагранждын теоремасын $[x_0, x]$ аралыгында $f(x) = \varphi(x)-\psi(x)$ функциясына колдонсок $x_0 < x$, анда $f(x) = f'(\xi)(x-x_0)$, анткени $f(x_0) = 0$. Ошондуктан $\xi > x_0$, $f'(\xi) = \varphi'(\xi)-\psi'(\xi) > 0$ экендигин эске алсак, $f(x) > 0$ же болбосо $x > x_0$ болгондо $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ ээ болобуз. ●

2-мисал. $(0, \infty)$ аралыкта $\ln(1 + x) > x-\frac{x^2}{2}$ барабарсыздыгы орун аларын көрсөткүлө.

Δ Эгерде $\varphi(x) = \ln(1 + x)$, $\psi(x) = x-\frac{x^2}{2}$ аркылуу белгилесек, анда $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}$, $\psi'(x) =1 - x$ жана $x > 0$ болсо $\frac{1}{1+x} > 1 - x$ барабарсыздыгы орун алат. Өз учурунда акыркы барабарсыздыктан $1 - x^2 < 1$ келип чыгат. 4-натыйжаны $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$ функцияларына колдонуп изделген барабарсыздыкты алабыз. ▲

4. Кошинин теоремасы.

Теорема. *Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана (a, b) аралыгында дифференцирленүүчү $(g'(x)\neq 0,\ x\in(a, b))$ функциялар болушса, анда* *эң жок дегенде бир чекит табылып,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{24}$$

барабардыгы орун алат.

○ Жардамчы

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

функциясын карайбыз жана λ санын $\varphi(a) = \varphi(b)$ шартынан же болбосо теӊ күчтүү

$$f(b) - f(a) + = \lambda (g(b)-g(a)) = 0 \tag{25}$$

барабарсыздыгынан аныктоого болот. Эми $g'(x) \neq 0$ шартынан $g(b) - g(a) \neq 0$ болору келип чыгат. Чынында эле, эгерде $g(b) - g(a) = 0$ болсо, анда $c \in (a, b)$ чекити табылып Роллдун теоремасы боюнча $g'(c) = 0$. Акыркы шарт $g'(x) \neq 0$ карама-каршы болот. (25) формуладан

$$-\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)}$$

табабыз. $\varphi(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде Роллдун теоремасын канааттандырат, б.а. $\xi \in [a, b]$ чекити табылып $\varphi'(\xi) = 0$ же $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$,

мындан $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ●

Эскертүү. $g(x) = x$ болгондо Кошинин формуласынан Лагранждын формуласы алынат, б.а. Лагранждын теоремасы Кошинин теоремасынын жекече учуру болот.

§ 6. ЛОПИТАЛДЫН ЭРЕЖЕСИ

Катыштын $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $x \to a$ кезиндеги пределин тапканда, бул эки функция бир мезгилде чексиз кичине же чексиз чоң чоңдуктар болушу мүмкүн. Бул учурда $\frac{0}{0}$ же $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыктарга ээ болобуз. Лопитал функциялардын катышын алардын туундуларынын катышы менен алмаштырып, аныксыздыктарды ача турган өзүнүн эрежесин сунуш кылган.

1-теорема. а) $\frac{0}{0}$ аныксыздыгы. *Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары (a, b) аралыгында дифференцирленүүчү функциялар болушуп, $x \to a+0$ кезинде $f(x)$, $g(x)$ чексиз кичине функциялар болушса, б.а.*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a+0} g(x) = 0, \ (\forall x \in (a, b), \ g'(x) \neq 0) \tag{2}$$

жана предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \tag{3}$$

жашаса (чектелген же чектелбеген), анда $x \to a+0$ кезде $\frac{f(x)}{g(x)}$ предели жашайт жана төмөнкү формула орун алат:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{4}$$

○ $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларынын маанилерин $x = a$ чекитинде

$$f(a) = g(a) = 0 \tag{5}$$

деп алабыз. Анда (2), (5) шарттары боюнча $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a, x]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушат. Анда Кошинин теоремасы боюнча

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{6}$$

мында $\xi \in (a, x)$. Эгерде $x \to a+0$ умтулса, анда $\xi \to a+0$.

Демек (3) шарт боюнча $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$. Ошондуктан, (6) барабардыгынан (4) формуласы келип чыгат. ●

Эскертүү. $x \to a+0$ кезде $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ же $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$ катышы $\frac{0}{0}$ түрүндө аныксыздыктар болушса, анда

$$\lim_{x\to a+0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=A$$

формуласы орун алат.

1-мисал. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)=\dfrac{1}{2}.$

2-теорема. б) $\dfrac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгы. *Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $(a,\ b)$ аралыгында дифференцирленүүчү болушуп $x\to a+0$ да $f(x)$, $g(x)$ чексиз чоң функциялар болушса, б.а.*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a+0}g(x)=\infty\ (\forall x\in(a,\ b),\ g'(x)\neq 0) \tag{7}$$

жана предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ *жашаса (A чектелген же чектелбеген), анда $x\to a+0$ кезде $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ предели жашайт жана төмөнкү формула орун алат:*

$$\lim_{x\to a+0}f(x)/g(x)=\lim_{x\to a+0}f'(x)/g'(x)=A.$$

○ Биз a чекитинин $(a-\varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ )$ аймагын алалык. Ушул аймактан $a<x<\beta$ шартын канааттандыруучу x жана β чекиттерин алалы. Анда Кошинин теоремасы боюнча

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{g(x)-g(\beta)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{8}$$

формуласы орун алат. Мында $a<x<\xi<\beta$. (8) барабардыгынан

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{g(x)-g(\beta)}=\frac{1-\dfrac{f(\beta)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(\beta)}{g(x)}}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{9}$$

же болбосо

$$\frac{f'(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}. \tag{10}$$

Теореманын шарты боюнча

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A \tag{11}$$

же болбосо

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

Мындан $x\in(a,\ \beta)$ үчүн

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon \tag{12}$$

барабарсыздыгын алабыз. Ал эми ξ чекити $(a,\ \beta)$ аралыгында жаткандыктан (12) негизинде

$$A-\varepsilon<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon, \tag{13}$$

барабарсыздыгы орун алат. (7) формула аркылуу

$$\lim_{x\to a+0}\frac{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}=1$$

маанисин алабыз.

Мындан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$1-\varepsilon<\frac{1-\frac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\frac{f(\beta)}{f(x)}}<1+\varepsilon. \tag{14}$$

Эми (13) жана (14) кош барабарсыздыктардын тиешелүү бөлүктөрүн көбөйтсөк төмөнкүгө ээ болобуз.

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(\beta)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\beta)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Эгерде $x\to a$ кезинде $\varepsilon\to 0$ умтулаарын эске алсак жана (10) барабарсыздыкты пайдалансак, анда

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{g(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

Акыркы барабардыкта $x\to a+0$, $(\varepsilon\to 0)$ пределге өтсөк

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

келип чыгат. ○

1-мисал. Берилген пределдерди тапкыла:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\cdot\sin x}{\sin 2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos x}\times$$
$$\times\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{2\cos 2x}=1.$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=$$
$$=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

в) Аныксыздыктардын башка түрлөрү. Ар кандай өзгөртүп түзүүнүн жардамы менен $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0 аныксыздыктарды $\frac{0}{0}$ же $\frac{\infty}{\infty}$ түрүнө алып келүүгө болот.

2-мисал. 1. $$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

Бул учурда $0\cdot\infty$ аныксыздыкты $\frac{\infty}{\infty}$ түрүнө алып өттүк, же болбосо аны $\frac{0}{0}$ түрүнө алып отолү.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}.$$

$(\infty-\infty)$ түрүндөгү аныксыздыкты ачууну карайлы.

$$2.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x}=\frac{1}{2}.$$

3. Эми 0^0, 1^∞, ∞^0 аныксыздыктарына токтололу. Бул максатта $z=[f(x)]^{g(x)}$ туюнтмасынын негизин e боюнча логарифмалап жиберебиз. $\ln z=g(x)\ln f(x)$ акыркы функциянын $x\to a$ кездеги пределин табабыз.

$$\lim_{x\to a}\ln z=\lim_{x\to a}g(x)\ln f(x).$$

$\lim\limits_{x\to a}\ln z=A$, б.а. $\ln z=A$, анда $z=e^A$.

3-мисал. 1. 0^0 аныксыздыкты эсептөө. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$, $z=x^x$ тен

$$\ln z=x\ln x,\ \lim_{x\to 0}\ln z=\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}x=0,\ \lim_{x\to 0}\ln z=\ln 1,\ \lim_{x\to 0}z=\lim_{x\to 0}x^x=1.$$

2. ∞^0 аныксыздыгына токтололу:

$$\lim_{x\to\pi/2}(tgx)^{2x-\pi},\ z=tgx)^{2x-\pi},\ \ln z=(2x-\pi)\ln tgx,\ \lim_{x\to\pi/2}\ln z=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\ln tgx=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tgx}{\frac{1}{2x-\pi}}=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{\sin 2x}=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x}=0.$$

$\ln\lim\limits_{x\to\pi/2}z=\ln 1$ же болбосо $\lim\limits_{x\to\pi/2}\ln z=1.$

§ 7. ТЕЙЛОРДУН ФОРМУЛАСЫ

Эгерде $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп жана ал (a, b) интервалында туундуга ээ болсо, анда Лагранждын формуласын

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + 0(x - x_0), \quad x \to x_0 \qquad (1)$$

түрүндө жазып аларыбызды биз жогоруда кордүк (§ 5. 3-п), мында

$$C = x_0 + \theta(x - x_0) \in (a, b), \quad 0 < \theta < 1.$$

Башкача айтканда, бир жолу дифференцирленүүчү функцияны x_0 чекитинин аймагында

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0) \; (y_0 = f(x_0), \; A = f'(x_0)) \qquad (2)$$

сызыктуу функциясы менен жакын деп эсептоого негиз бар.

$$f(x) = P_1(x) + 0(x - x_0), \; x \to x_0. \qquad (3)$$

Мунун өзү бизге ушул эле маселени кенейирээк коюуга мүмкүндүк берет: эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде n-тартиптеги туундуга ээ болсо, анда аны бул чекиттин аймагында

$$f(x) = P_n(x) + 0(x - x_0), \; x \to x_0 \qquad (4)$$

түрүндо жазууга болобу? Мында $P_n(x) - n$-даражадагы коп мүчө,

$$P_n(x_0) = f(x_0), \; P_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, \; P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad (5)$$

Бул коп мүчөнү (2) формуладагыдай эле

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n \qquad (6)$$

түрүндо издоо максатка ылайыктуу. Мындан $P_n(x_0) = A_0$ экенин, ал эми

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n \; (x - x_0)^{n-1}$$

барабардыгынан $P_n'(x_0) = A_1$ жана

$$P_n''(x) = 2A_2 + \ldots + n(n-1) \, A_n(x - x_0)^{n-2}$$

барабардыгынан $P_n''(x_0) = 2A_2$ болорун жана жалпы эле

$P_n^{(\kappa)}(x_0)=\kappa!A_\kappa$, $\kappa=0,1,\dots,\ n$ формуласынын орун аларын көрөбүз. Эгерде дагы $P_n^{(\kappa)}(x_0)=f^{(\kappa)}(x_0)$, $(\kappa=0,1,\dots,\ n)$ болорун эске алсак, анда

$$A_\kappa=\frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!},\ \kappa=0,1,\dots,\ n.$$

Акыркы барабардыкты (6) формулага коюп,

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

көп мүчөсүн алабыз. Бул көп мүчө үчүн (4) шарттын орун алышын текшерип көрөлү.

Эгерде

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

деп белгилеп алсак, анда (5) барабардыктардан

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\dots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

болорун көрөбүз. Ошондуктан Лопиталдын эрежесин пайдаланып (§ 6ны кара), төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}}=\dots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

башкача айтканда

$$R_n(x)=0((x-x_0)^n),\ x\to x_0 \qquad (7)$$

орун аларын көрөбүз.

Ошентип, төмөнкү теорема далилденди.

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп жана $(a,\ b)$ интервалында n-тартиптеги туундуга ээ болсо, $x\to x_0\in[a,\ b]$ учурда*

$$f(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}(x-x_0)^\kappa+0((x-x_0)^n) \qquad (8)$$

формуласы орун алат. Эгерде $a=x_0$ же $b=x_0$ болуп, каралып *жаткан туундулар бул чекиттерде бир жактуу туундулар катары каралууга тийиш.*

Алынган (8) формула n-тартиптеги Тейлордун формуласы деп, ал эми

$$P_n(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(x_0)}{\kappa!}(x-x_0)^{\kappa}$$

Тейлордун көп мүчөсү деп жана (7) формула — Тейлордун формуласынын Пеанонун формасындагы калдыгы деп аталышат.

Эгерде (8) формулада $x_0=0$ болсо анда ал калдыгы Пеано түрүндө берилген Маклорендин формуласы деп аталат:

$$f(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}x^{\kappa}+0(x^{n}),\ x\to 0.$$

Жогоруда аталган теорема анализдин көп тармактарында кенен колдонулат. Анын негизги мааниси — функцияны каралып жаткан чекиттин аймагында алгебралык көп мүчө менен алмаштырып кароого мүмкүндүк бергендигинде жана бул учурдагы кетирилген каталыктар чексиз кичине чоңдукта болорун айгинелеп турат.

1. Тейлордун формуласынын калдыгы.

Жогоруда Тейлордун формуласынын калдыгы сан жагынан эмес, сапат жагынан мүнөздөөчү формада (Пеанонун формасында) көрсөтүлдү. Төмөндө биз сан жагында да мүнөздөлүүчү формаларын көрсөтөбүз. Ал үчүн $R_n(x)$ калдыгын $(x-x_0)^p\cdot H$ түрүндө издейбиз, б.а.

$$f(x)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{\kappa}(x_0)}{\kappa!}(x-x_0)^{\kappa}+(x-x_0)^{p}\cdot H$$

барабардыгын алабыз. Эгерде x_0 туруктуу сандын ордуна t өзгөрмөсүн элестетсек, анда төмөндөгүдөй жалпы функцияны карап болоор элек:

$$F(t)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{f^{\kappa}(t)}{\kappa!}(x-t)^{\kappa}+(x-t)^{p}\cdot H. \tag{9}$$

Бул функция $[a, x]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз экенин көрөбүз, себеби бул кесиндиде каралып жаткан $f(x)$ функциясы өзүнүн $(n-1)$-тартиптеги туундусу менен бирге үзгүлтүксүз болуп берилген. Андан тышкары $t = x_0$ учурда $F(x_0) = f(x)$ орун аларын көрүп турабыз, ал эми $t = x$ учурда $F(x) = f(x)$ экенин алабыз. Дагы бир нерсе — $F(x)$ функциясы (a, x) интервалында туундуга ээ, себеби анда $f(x)$ функциясы өзүнүн n-тартиптеги туундусуна ээ.

Демек, $F(x)$ функциясы Роллдун теоремасынын шарттарын канааттандырып турат — ал $[a, x]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана (a, x) интервалында туундуга ээ, андан тышкары анын учтарында бирдей маанилерге ээ. Ошондуктан x_0 жана x чекиттеринин ортосунда жаткан $t = x_0 + \theta(x - x_0)$ чекитинде $F(x)$ функциясынын туундусу нөлгө барабар: $F'(t) = 0$. Акыркыны эсептеп табалы:

$$F'(t) = f'(t) - f'(t) + (x-t)\, f''(t) - (x-t)\, f''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) +$$

$$+ \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - P(x-t)^{p-1} \cdot H.$$

Бул барабардыкта акыркы эки кошулуучудан башкалары өз ара кыскарып кетишет. Эгерде калган туюнтмада жогоруда айтылган $t = x_0 + \theta(x - x_0)$ маанини карасак, анда ал нөлгө айланат:

$$\left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - P(x-t)^{p-1} \cdot H\right]_{t = x_0 + \theta(x - x_0)} = 0.$$

Мындан

$$H = \frac{(x-x_0)^{n-p}}{(n-1)!\,P} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

же

$$(x - x_0)^p \cdot H = R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!\,P} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)). \quad (10)$$

Эгерде $P = n$ деп алсак, анда акыркы формуладан (ал Тейлордун формуласынын калдыгы Шлёмильх-Рошанын түрүндөгү калдык деп аталат) Лагранждын түрүн алабыз:

ɣ₁

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ 0<\theta<1,$$

ал эми $P = 1$ учурунда Кошинин формасын алабыз:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ 0<\theta<1.$$

Жыйынтыгында биз мына бул теореманы далилдедик.

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[x_0, x]$ кесиндисинде өзүнүн $(n-1)$ тартиптеги туундулары менен бирге үзгүлтүксүз болуп жана (x_0, x) интервалында анын n тартиптеги туундусу аныкталган болсо, анда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \qquad (11)$$

түрүндөгү Тейлордун формуласы орун алат жана анын калдыгынын жалпы түрү (10) формуласы аркылуу туюнтулат.

Эскертүү. Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде өзүнүн n тартиптеги туундулары менен бирге үзгүлтүксүз болсо, анда Тейлордун формуласынын Пеано түрүндөгү калдыгы анын Лагранж түрүндөгүсүнөн келип чыгат:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0)) - f^{(n)}(x_0)\right] = \frac{(x-x_0)^n}{n!}\,\cdot$$
$$\cdot f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\, o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$

Көнүгүүлөр.

1. Тейлордун формуласынын жалпы түрүн жана анын калдыгынын жалпы түрүн $x_0 = 0$ учурун жазгыла.

2. Тейлордун калдыгын Лагранж, Коши жана Пеано түрлөрүндө жазгыла.

Мисалдар.

1. Ньютондун биному. n-даражадагы

$$P_n(x) = (a+x)^n$$

көп мүчөнү алалы, мында a — берилген сан. Бул мүчөнүн κ-туундусу

$$P_n^{(\kappa)}(x) = n(n-1)...(n-\kappa+1)(x+a)^{n-\kappa}$$

болгондуктан, мындан

$$P_n^{(\kappa)}(0) = n(n-1)...(n-\kappa+1)\ a^{n-\kappa}$$

экенин алабыз, демек, Маклорендин формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}\cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}\ a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ a^{n-3}\cdot x^3 +$$

$$+...+\frac{n(n-1)...2}{(n-1)!}\ a\cdot x^{n-1} + x^n.$$

Алынган формула *Ньютондун биному* деп аталат жана мунун өзү n-даражадагы көп мүчөнүн Тейлордун (Маклорендин) көп мүчөсү катарында жазылган түрүн көрсөтөт.

Эгерде

$$C_n^\kappa = \frac{n(n-1)...(n-\kappa+1)}{\kappa!},\ C_n^0 = C_n^n = 1$$

деген белгилөөнү пайдалана турган болсок, анда Ньютондун биномун

$$(a+x)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa\ a^{n-\kappa}x^\kappa$$

түрүндө жаза алабыз, мында C_n^κ — *биномдук коэффициенттер* деп аталышат жана алардын башкача формалары — булар:

$$C_n^\kappa = \frac{n(n-1)...(n-\kappa+1)}{\kappa!} = \frac{n(n-1)...2\cdot 1}{\kappa!(n-\kappa)!} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!},$$

мында $\kappa = 0,1,...(0!=1)$ жана $C_{n+1}^{\kappa+1} = C_n^\kappa + C_n^{\kappa+1}$ формуласы орун аларын далилдөө кыйынга турбайт (далилдөөсүн жүргүзгүлө).

2. $f(x) = e^x$ функциясы, мында $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $(n = 0,1,...)$ экенин көрөбүз. Ошондуктан Маклорендин формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} +...+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

мында $R_n(x)$ Тейлор-Маклорендин формуласынын калдыгы жана анын Лагранждын формуласына ылайык

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \ (0 < \theta < 1)$$

түрүндө жазылат.

Эгерде $x = 1$ чекитин ала турган болсок, анда e санынын жакындаштырылган мааниси

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}$$

болорун алабыз, мындагы кетирилген каталык

$$R_n(1) \leqslant \frac{1}{n!} e < \frac{3}{n!}$$

формуласы менен мүнөздөлөрүн көрөбүз
Баарынан да

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \to 0, \ n \to \infty$$

экени, б.а. алынган Тейлор-Маклорендин формуласынын калдыгы нөлгө ылдам эле умтуларын көрөбүз.

3. Тригонометриялык функциялардын ичинен $f(x) = sin x$ функциясын алалы.
Мында

$$|f(x)| = |sin x| \leqslant 1, \ |sin^{(n)} x| \leqslant 1, \ f(0) = 0, \ f^{(2n)}(0) = 0,$$

$$f'(0) = 1, \ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \ n = 0, 1, \ldots, \ x \in R'$$

болгондуктан, Маклорендин формуласы

$$sin x = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)} x^{2\kappa+1} + 0(x^{2n+2}), \ x \to 0$$

түрүнө ээ.

Ошондой эле

$$cos x = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(-1)^\kappa}{(2\kappa)!} x^{2\kappa} + 0(x^{2n+1}), \ x \to 0.$$

4. Эгерде $f(x) = ln(1 + x)$ функциясын алсак, анда

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ n = 0,1,...$$

экенин алабыз, демек,

$$ln(1+x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa} x^{\kappa} + 0(x^n), \ x \to 0.$$

5.Тейлордун формуласын пределдерди табууда да пайдаланса болот. Эгерде $f(x)$ функциясы үчүн

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0, \ f^{(n)}(0) \neq 0$$

болсо, анда бул функцияны Маклорендин формуласына ылайык

$$f(x) = ax^n + 0(x^n), \ x \to 0 \qquad (*)$$

мында $a \neq 0$ түрүндө жаза алабыз.
Эгерде дагы бир $g(x)$ функциясы үчүн да ушундай эле шарт аткарылса:

$$g(0) = g'(0) = ... = g^{(n-1)}(0) = 0, \ g^{(m)}(0) \neq 0,$$

анда да аны

$$g(x) = bx^m + 0(x^m), \ x \to 0, \qquad (**)$$

мында $b \neq 0$ түрүндө жаза алабыз.

Көп эле учурларда бизге төмөнкүдөй пределди табууга туура келет:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Бирок жогоруда көрсөтүлгөндөй, бул учурда $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздыкта калабыз. Ошого карабастан (*) жана (**) барабардыктардан төмөндөгүлөрдү ала алабыз:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^n + 0(x^n)}{bx^m + 0(x^m)} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{эгерде } n = m, \\ 0, & \text{эгерде } n > m, \\ \infty, & \text{эгерде } n < m. \end{cases}$$

Мисал. Берилген өзгөрүлмөнүн пределин табалы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot(1+x)^{-\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot e^{-\frac{1}{x}\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot e^{-\left(1-\frac{x}{2}+0(x)\right)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{2}+0(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}+0(x^2)-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

§ 8. ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИЗИЛДӨӨДӨ АЛАРДЫН ТУУНДУЛАРЫНЫН ПАЙДАЛАНЫЛЫШЫ

1. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар.

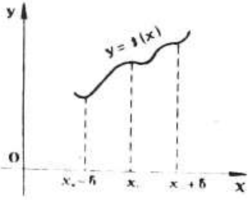
а) Дифференцирленүүчү функциялардын чекиттеги өсүүчү (кемүүчү) шарттары.

Берилген f функциясы $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta\le x\le x_0+\delta)$, $\delta>0$ аймакта аныкталган болсун дейли.

1-теорема. *Эгерде $f'(x_0)>0$ болсо, анда x_0 чекитинде f — анык өсүүчү, ал эми $f'(x_0)<0$ болсо, анда ал чекитте f — анык кемүүчү функция.*

○ Каралып жаткан эки учурдун бирин алалы, мисалы, $f'(x)>0$. Бул учурда анын туундусунун аныктамасын эске алсак:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$



31-сүрөт

мындан

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

барабардыгына ээ болобуз. Мунун өзү

$$x\in U_\delta^-(x_0)=(x_0-\delta\le x\le x_0)$$

учурда $f(x)<f(x_0)$, ал эми

$$x\in U_\delta^+(x_0)=(x_0<x<x_0+\delta)$$

учурда $f(x)>f(x_0)$ айтылыштарына эквиваленттүү, башкача айтканда $f(x_0)$ саны x_0 чекитинин бардык сол жагындагы чекиттерде f тин маанилеринен чоң, ал эми оң жагындагы чекиттерде f тин маанилеринен кичине деген тыянакка келип отурабыз. Аныктама боюнча бул — өсүүчү функция (31-чийме).

Теореманын экинчи бөлүгү да ушундай эле жол менен далилденет. ◕

б) Дифференцирленүүчү функциялардын интервалдагы өсүүчү (кемүүчү) шарттары.

2-теорема. *Берилген f функциясы (a, b) интервалында дифференцирленүүчү болсун дейли. Анын (a, b) интервалында өсүүчү функция болушу үчүн $f'(x) \geqslant 0$ шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.*

Ошондой эле төмөнкү эки айтылыш эквиваленттүү:

1) f функциясы (a, b) интервалында кемүүчү;

2) $x \in (a, b) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$.

○ Каралып жаткан эки учурдун бирин алалы, мисалы, биринчисин. f — берилген интервалда өсүүчү функция болсун. Каалагандай $x_0 \in (a, b)$ чекитин алсак, анда бардык $x \in (a, b)$ үчүн

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0),$$
$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$$

болорун көрөбүз. Демек, $x \neq x_0$ үчүн $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ барабарсыздыгы орун алат жана $x \to x_0$ учурда $f'(x_0) \geqslant 0$ дегенге келебиз, мындан $x_0 \in (a, b)$ — каалагандай алынган чекит болгондуктан бардык $x \in (a, b)$ үчүн $f'(x) \geqslant 0$ шартын алабыз.

Тескерисинче эгерде бардык $x \in (a, b)$ үчүн $f'(x) \geqslant 0$ барабарсыздыгы орун алса, анда $x_1 < x_2 (x_1, x_2 \in (a, b))$ үчүн Лагранждын теоремасы боюнча

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

барабардыгын жаза алабыз, мында $f'(\xi) \geqslant 0$ $(\xi \in (a, b))$. Демек, бардык $x_1 x_2 \in (a, b)$ үчүн $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$, б.а.

аргументтин чоң маанисине функциянын чоң (тагыраак айтканда кичине эмес) мааниси туура келерин алабыз. Мунун өзү f функциясы (a, b) интервалында өсүүчү дегендик.

Теореманын экинчи бөлүгү да ушул эле жол менен далилденет. ●

Эскертүү. Биз жогоруда каралып жаткан (a, b) интервалындагы өсүүчү функция жөнүндө сөз кылганыбызда ал функциянын (a, b) интервалынын кайсы бир жерлеринде турактуу болушу да, эгер турактуу болбосо — анык өсүүчү функция болорун, бирок ал анда эч кандай кемүүчү функция болбой тургандыгын айтып жатабыз.

Кемүүчү функция жөнүндө да ошого окшош айтылыштар орун алат.

в) Функциянын анык өсүүчү болушунун жетиштүү шарты.

3-теорема. *Эгерде бардык $x \in (a, b)$ үчүн*

$$f'(x) > 0,$$

болсо, анда f функциясы (a, b) интервалында анык өсүүчү, ал эми

$$f'(x) < 0$$

болсо, анда анык кемүүчү функция болот.

○ Каалаган $x_1, x_2 \in (a, b)$ үчүн Лагранждын формуласынан:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

$f'(x) > 0$ $(x \in (a, b))$ учурда $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ал эми $f'(x) < 0$ учурда $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ туюнтмалары орун алышын көрөбүз, булардын өзү — далилдеңүүчүлөр. ●

Эскертүү. $f'(x) > 0$ же $f'(x) < 0$ $(x \in (a, b))$ барабарсыздыктардын аткарылышы функциянын каралып жаткан интервалда өсүүчү же кемүүчү болушунун жетиштүү гана шарттары жана алар зарылдыгы жок экенин белгилеп кетүү керек.

1-мисал. $f(x) = x^3$ функциясы $(-\infty, \infty)$ интервалында анык өсүүчү функция болуп туруп $x = 0$ чекитинде $f'(0) = 0$ барабардыгын аткарып турат, мында $f'(0) > 0$ же $f'(0) < 0$ шарттары зарыл эмес.

2. Функциянын экстремумдары.

а) Экстремумдун зарыл шарты. Локалдык экстремумдар жөнүндө буга чейин көп эле айтып келдик. Экстремумдун зарыл шарты Ферманын теоремасында да айтылган. Бул теорема боюнча f функциясынын локалдык экстремумун анын биринчи тартиптеги туундусу нөлгө барабар болгон же ал туунду кайсы бир себептер менен болбой калган чекиттердин арасынан издеш керек. Функциянын биринчи тартиптеги туундусу нөлгө айланган чекиттердин тобун *стационардык чекиттердин тобу* деп аташат. Бардык эле стационардык чекиттерде f функциясы экстремумга ээ боло бербейт. Алсак, $f(x)=x^3$ функциясы көрсөтүп тургандай (мында $x=0$ чекитинде $f'(0)=0$, бирок бул стационардык чекит болгон менен экстремалдык болбойт),

$$f'(x_0)=0$$

барабардыгы x_0 чекитинин экстремумдук чекити болушунун биринчи гана белгиси — зарыл гана шарты боло алат. Эгерде $f'(x_0)\neq 0$ болсо, анда f функциясы бул чекитте экстремумга ээ болбойт (бул учурда x_0 чекити, же анык өсүү, же анык кемүү чекити болот).

б) Экстремумдардын жетиштүү шарттары.

4-теорема. (Экстремумдун биринчи жетиштүү шарты). Берилген f функциясы x_0 чекитинин $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ аймагында дифференцирленүүчү болсун дейли. Эгерде $x\in U_\delta^-(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0)$ учурда $f'(x)\leq 0$, ал эми $x\in U_\delta^+(x_0)=$ $=(x_0,\ x_0+\delta)$ учурда $f'(x)\geq 0$ болсо, анда x_0 чекитте f локалдык минимумга ээ.

Эгерде $x\in U_\delta^-(x_0)$ учурда $f'(x)\geq 0$, ал эми $x\in U_\delta^+(x_0)$ учурда $f'(x)\leq 0$ болсо, анда x_0 чекитте f локалдык максимумга ээ.

○ Бардык $x\in U_\delta(x_0)$ үчүн Лагранждын теоремасы боюнча

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\,\Delta x,\ 0<\theta<1$$

формулась орун алат, мында $x \in U_\delta^-(x_0)$ үчүрдө $f'(\xi)\Delta x = f'(\xi)(x - x_0) \leq 0$, ал эми $x \in U_\delta^+(x_0)$ үчүрдө $f'(\xi)\Delta x \geq 0$ туюнтмалары аныкталат, демек, $x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$, б.а. x_0 — минимум чекити.

Теореманын экинчи жарымы да ушундай эле далилденет. ○

Эскертүү. Эгерде келтирилген теоремада $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) \geq 0)$ барабарсыздыктарынын ордуна $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ так анык барабарсыздыктары аткарылса, анда x_0 чекити анык экстремумдук чекит болот.

Демек, далилденген теореманын негизинде функциянын чекиттеги экстремумун табуунун төмөнкүдөй 1-эрежесин айтууга болот.

1. Экстремумга ээ болуучу бардык шектүү чекиттерди табуу үчүн:

а) функциянын биринчи тартиптеги туундусун таап, аны нөлгө барабарлап, андан пайда болгон теңдеменин чыныгы тамырларын табуу керек;

б) $f(x)$ функциянын аныктоо областынын ичинен туундусунун жашабай турган чекиттерин табуу;

2. Ар бир табылган шектүү x_0 чекитинин сол жагынан оң жагына өткөндө $f'(x)$ функциясынын белгиси оңдон терске өтсө x_0 дө f максимумга ээ болот; ал эми $f'(x)$ белгиси терстен оңго өзгөрсө x_0 чекитинде f минимумга ээ болот.

Жогоруда айтылгандай $f'(x_0) = 0$ шарты аткарылып, бирок x_0 чекити экстремумдун чекити экени кайсы бир себептерден аныкталбай калса, анда f функциясынын жогорку тартиптеги туундуларын да пайдаланууга болот.

в) экстремумдун экинчи жетиштүү шарты. Эгерде f функциясы x_0 чекитинде n-тартиптеги туундуга ээ болсо, анда Тейлордун формуласын пайдаланып төмөндөгү эрежеге келебиз.

5-теорема. *Берилген f функциясы $U_\delta(x_0)$ аймакта n жолу дифференцирленүүчү болсун дейли.*

Эгерде

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

болсо, анда n — так сан учурунда x_0 — локалдык экстремум чекити болбойт, ал эми n — жуп сан учурунда x_0 — локалдык экстремум чекити болот, тагыраак айтканда, $f^{(n)}(x_0) > 0$ учурунда x_0 — локалдык минимум, $f^{(n)}(x_0) < 0$ учурунда x_0 — локалдык максимум чекит болот.

○ Тейлордун формуласы боюнча

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n,$$

$$\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$$

$f^{(n)}(\xi)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, $x - x_0$ чоңдугу жетиштүү өлчөмдө кичине учурунда $f^{(n)}(\xi)$ функциясынын белгиси $f^{(n)}(x_0)$ санынын белгиси менен дал келет. Демек, $f(x) - f(x_0)$ чоңдугунун белгиси

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

чоңдугунун белгиси менен дал келет.

Ошондуктан, эгерде $n = 2m$ болсо, анда $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m} \geq 0$, демек, $f^{(2m)}(x_0) > 0$ учурда x_0 — локалдык (анык) минимум, ал эми $f^{(2m)}(x_0) < 0$ учурда x_0 — локалдык (анык) максимум болот.

Эгерде $n = 2m + 1$ болсо, анда $x \in U_\delta^-(x_0)$ учурда $(x - x_0)^n = (x - x_0)^{2m+1} \leq 0$, ал эми $x \in U_\delta^+(x_0)$ учурда $(x - x_0)^{2m+1} \geq 0$ болот, демек, $R_n(x)$ функциясы x_0 чекитинин (эң кичине) аймагында турактуу белгиге ээ болбой, ошону менен эле бирге $f(x) - f(x_0)$ чоңдугу да турактуу белгиге ээ боло албайт. Ошондуктан x_0 экстремумдун чекити боло албайт. ●

2-мисал. а) $f(x) = x^3 - x$. Мында $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,\ f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,$$

$f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, $f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$. Демек, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — локалдык минимум, ал эми $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — локалдык максимум чекиттери болушат.

б) $f(x) = x^3$. Мында $f'(0) = f''(0) = 0$, бирок $f'''(0) = 6$. $x_0 = 0$ чекитинде бул функция локалдык экстремумга ээ болбойт.

3. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери.

а) Үзгүлтүксүз функция. Эгерде f функциясы $[a, b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болсо, анда Вейерштрасстын теоремасы боюнча эң болбогондо x_1, $x_2 \in [a, b]$ чекиттери табылат жана аларда

$$f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

$$f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} (x)$$

туюнтмалары орун алат, б.а. функциянын эң кичине жана эң чоң маанилери бул чекиттерде жетилишет. Мында x_1 жана x_2 чекиттери берилген f функциясы үчүн жана берилген $[a, b]$ кесинди үчүн жалгыз чекиттер болушат деп айтылбайт, тескерисинче мындай чекиттердин бирден көп экени баса белгиленүүдө, алардын ичинде локалдык максимум жана локалдык минимум чекиттери да бар.

Эгерде $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — локалдык максимум чекиттери, ал эми $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — локалдык минимум чекиттери болушса, анда $[a, b]$ кесиндисинде f тин эң чоң мааниси болуп $\{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_r), f(b)\}$ сандардын эң чоңу эсептелет жана $\{f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_r), f(b)\}$ сандардын эң кичинеси f тин $[a, b]$ дагы эң кичине мааниси болот.

б) Дифференцирленүүчү функция. Эгерде f функциясы $[a, b]$ үзгүлтүксүз жана (a, b) интервалында дифференцирленүүчү болуп, ал эми $f'(x) = 0$, $(x \in (a, b))$

теңдемесинин жалгыз чыгарылышы $x_0 \in (a,\ b)$ бар болсо, ал x_0 томондогу шарттарды канааттандырса

$$x \in (a,\ x_0) \Rightarrow f'(x) > 0,$$

$$x \in (x_0,\ b) \Rightarrow f'(x) < 0,$$

$$x \in (a,\ x_0) \Rightarrow f'(x) > 0,$$

$$x \in (x_0,\ b) \Rightarrow f'(x) > 0,$$

анда $f(x_0)$ локалдык экстремум эле болбостон, $[a,\ b]$ кесиндидеги глобалдык экстремум (эң чоң биринчи учурда, эң кичине экинчи учурда) боло алат.

Эгерде x_0 чекитине окшогондор бирден коп болсо, алардын ар бирин өзүнчө тактап а пунктундагы жолго өтөбүз.

3-мисал. Берилген функция $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$, ал эми $[a,\ b] = [0,\ 3]$ болсун дейли. Каралып жаткан функция бардык сандык окто дифференцирленүүчү болгондуктан анын бардык экстремалдык чекиттерин стационардык чекиттердин арасынан издөө керек. Башкача айтканда

$$f'(x) = (x - 2)(x + 1)^2(5x - 4) = 0$$

теңдемеси $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{4}{5},\ x_3 = 2$ деген тамырларга ээ. Биринчи чыгарылышты алсак, анда ал берилген $[0,\ 3]$ кесиндиде жатпайт. Ошол себептен аны эске албай эле кийинки x_2 чекитин кароого өтө беребиз.

$$x < x_2 \Rightarrow f'(x) > 0,$$

$$x > x_2 \Rightarrow f'(x) < 0,$$

демек, $x_2 = \frac{4}{5} \in [0,\ 3]$ локалдык максимум чекит. Ошондой эле жол менен $x_3 = 2 \in [0,\ 3]$ — локалдык минимум чекит.

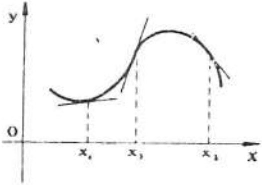
Андагы функциянын маанилери: $f(x_2) = \frac{3^8}{4^5}$, $f(x_3) = 0$. Ал эми $[0,\ 3]$ кесиндисинин четки чекиттериндеги f тин маанилери болуп $f(0) = 4$, $f(3) = 4^3$ эсептелишет.

Демек, $\{f(0),\ f\left(\frac{5}{4}\right),\ f(2),\ f(3)\}$ сандарынын эң чоңу $M = f(3) = 64$, ал эми алардын эң кичинеси $m = f(2) = 0$ болушат.

Ошентип, $M = 64$ — каралып жаткан функциянын $[0, 3]$ кесиндидеги эң чоң мааниси, ал эми $m = 0$ — анын эң кичине мааниси болушат.

4. Функциянын графигинин иймектиги.

1-аныктама. *Эгерде f функциясынын аныкталуу областынан алынган x_0 чекитинин кандайдыр бир аймагындагы чекиттерге туура келүүчү функциянын маанилеринде ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын графигинин төмөн (жогору) жагында жатса, анда ал функциянын графигинин ийрилиги каралып жаткан чекитте төмөн (жогору) жакка багытталган деп айтабыз* (32-чиймени кара). Мында x_1 чекитинде функциянын графигинин иймектиги төмөнгө багытталган, ал эми x_2 чекитте — жогору багытталган.



32-чийме

Жогоруда келтирилген функциянын иймектиги жөнүндөгү аныктаманы төмөндөгүчө берүү максатка ылайыктуу.

2-аныктама. *f функциясы $[a, b]$ кесиндиде төмөнгө багытталган иймек функция деп ал төмөнкү шартты канааттандырса гана айта алабыз:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad (1)$$

мында $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\lambda \in [0,1]$.

Көнүгүүлөр.

$f(x) = x^2$ функциясы үчүн:

1) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ \lambda = \frac{1}{2}$;

2) $x_1 > a,\ x_2 = b,\ \lambda = 0$;

3) $x_1 > a,\ x_2 = b,\ \lambda = 1$;

4) $x_1 = a,\ x_2 < b,\ \lambda = \frac{1}{3}$

учурлардагы функциянын графигинин мүмкүн болгон чиймелерин келтиргиле.

1-теорема. *Эгерде* $(a,\ b)$ *интервалында* f *функциясы биринчи тартиптеги туундуга ээ болсо, анда төмөнкү эки айтылыштар эквиваленттүү:*

(1) f — *төмөнгө багытталган иймек функция;*

(2) $f(x_1) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),\ \forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b)$.

○ (1) $\Rightarrow$ (2). Шарт боюнча f — төмөнгө багытталган иймек болгондуктан бардык $x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ \lambda \in [0,1]$ үчүн

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant f(x_2) + \lambda[f(x_1) - f(x_2)]$$

деп жаза алабыз. Мындан

$$\frac{f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) - f(x_2)}{\lambda} \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

же $\lambda \to 0+0$ учурда

$$\lim_{\lambda \to 0+0} f'(x_0 + \theta\lambda\ (x_1 - x_2))(x_1 - x_2)) = f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

экенин алабыз, ал эми акыркы болсо (1) туюнтманын өзү.

(2) $\Rightarrow$ (1). (2) формуланы эки жолу пайдаланып төмөнкүлөрдү жаза алабыз:

$$f(x_2) \geqslant f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) + f'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\ [x_2 - (x_2 + \lambda(x_1 - x_2))],$$
$$f(x_1) \geqslant f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) + f'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\ [x_1 - (x_2 + \lambda(x_1 - x_2))],$$

же

$$f(x_2) \geqslant f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) + f'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\ [-\lambda(x_1 - x_2)],$$
$$f(x_1) \geqslant f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) + f'(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))\ (1-\lambda)(x_1 - x_2).$$

Акыркы барабарсыздыктардын биринчисин $(1-\lambda)$ га жана экинчисин λ га көбөйтүп, андан кийин алынган эки барабарсыздыктарды кошуп (1) ге келебиз:

$$(1+\lambda)f(x_2) \geqslant (1-\lambda)f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) - \lambda(1-\lambda)f'(x_2 + \lambda(x_1 -$$
$$- x_2))(x_1 - x_2),$$

$$\lambda f(x_1)\geqslant\lambda f(x_2+\lambda(x_1-x_2))+\lambda(1-\lambda)f'(x_2+\lambda(x_1-x_2))(x_1-x_2),$$

$$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\geqslant f(x_2+\lambda(x_1-x_2))=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2). \quad ●$$

Ушундай эле жол менен томонку теореманы да далилдөөгө болот:

2-теорема. *Жогоруда келтирилген теореманын бардык шарттары аткарылсын дейли. Анда томонку эки айтылыштар эквиваленттүү:*

(1) f *— анык иймек (томонго карай) функция;*

(2) $f(x_2)>f(x_1)+f'(x_2)(x-x_2), \quad \forall x_1,\ x_2\in(a,\ b).$

Эгерде жогоруда келтирилген эки теоремалар функциянын графигинин иймектиги ал функциянын биринчи тартиптеги туундусу аркылуу туюнтуларын мүнөздөсо, томондо келтирилген теоремада анын экинчи тартиптеги туундусу аркылуу байланышат.

3-теорема. *Эгерде f функциясы $[a,\ b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз болуп жана $(a,\ b)$ интервалында экинчи тартиптеги туундуга ээ болсо, анда томонку эки айтылыштар тең күчтүү:*

1) *f тин $[a,\ b]$ дагы иймектиги томонго багытталган;*

2) *бардык $x\in(a,\ b)$ үчүн $f''(x)\geqslant 0$.*

○ 1) $\Rightarrow$ 2). Эгерде 1) айтылыш орундуу болсо, анда эки жолку дифференцирленүүчү касиетин эске алып жана Лагранждын формуласын —

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad 0<\theta<1$$

эки жолу пайдаланып, томонкүлөрдү жаза алабыз:

$$x_1,\ x_2\in[a,\ b]\Rightarrow\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in[a,\ b],\ \lambda\in[0,1],$$

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_2+\lambda(x_1-x_2)=x_1-[x_1-x_2-\lambda(x_1-x_2)]=$$

$$=x_1-(1-\lambda)(x_1-x_2)=x_1+(1-\lambda)(x_2-x_1),$$

$$0<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=-\lambda[f(x_1+(1-\lambda)x_2)-$$

$$f(x_1)]-(1-\lambda)[f(x_2+\lambda(x_1-x_2))-f(x_2)]=-\lambda f'(x_1+\theta(1$$

$$-\lambda)(x_2-x_1))(1-\lambda)(x_2-x_1)+(1-\lambda)f'(x_2+\xi\lambda(x_1-x_2))\lambda(x_2-$$

$$-x_1)=\lambda(1-\lambda)(1-\xi\lambda-\theta+\theta\lambda)f''(x_1+\theta(1-\lambda)(x_2-x_1)+\eta(1-\xi\lambda+$$

$$+\theta-\theta\lambda)(x_2-x_1))(x_2-x_1)^2. \tag{2}$$

Мында $0<\theta<1$, $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $1-\xi\lambda+\theta-\theta\lambda\geq 0$ болгондуктан $f''(x)\geq 0$ экенин алабыз, демек, 2) айтылыш далилденди.

2) $\Rightarrow$ 1) айтылыштын далилдоосү 3-теореманын далилдоосүндө келтирилген. Ошого карабастан бул теореманын тескерисинче болгон далилдоосү (2) туюнтмадан да келип чыгаары көрүнүп турат. ●

Көнүгүүлөр.

1) Эгерде 3-теореманын бардык шарттары аткарылган болсо, анда төмөнкү эки айтылыштар тең күчтө болорун далилдегиле:

а) f тин $[a, b]$ дагы иймектиги жогору багытталган;

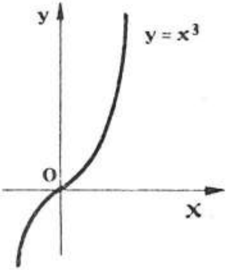
б) бардык $x\in(a, b)$ үчүн $f''(x)\leq 0$.

2) Эгерде f функциясы $[a, b]$ да анык иймек функция болсо да анын айрым чекиттеринде $f''(x)=0$ барабардыгы орун алаарына мисал келтиргиле.

5. Алмашуу чекити.

а) Алмашуу чекити жөнүндө түшүнүк. Бизге берилген f функциясы x_0 чекитинин $U_\delta(x_0)$ аймагында аныкталып жана анда биринчи тартиптеги туундуга ээ болсун дейли. Эгерде $x\in U_\delta^-(x_0)=(x_0-\delta\leq x\leq x_0)$ учурда f функциянын иймектиги төмөнгө (жогору) багытталган болсо, ал эми $x\in U_\delta^+(x_0\leq x\leq x_0+\delta)$ учурда f тин иймектиги жогору (төмөнгө) багытталган болсо, анда x_0 — функциянын графигинин алмашуу чекити, ал эми $(x_0, f(x_0))$ — чекитин f тин графигинин *алмашуу чекити* деп айтабыз.

Мисалы. $f(x)=x^3$ функциясын алалы. Мында $x>0$ учурда $f''(x)<0$, ал эми $x>0$ учурда $f''(x)>0$ болорун көрсөтөбүз (33-чийме). Ошондуктан (3-теорема боюнча) $(-\infty, 0)$ интервалында бул функциянын иймектиги анык төмөнгө багыт



33-чийме

талган, ал эми $(0, +\infty)$ интервалында ал жогору багытталган иймек функция болот. Мында $x = 0$ чекити функциянын төмөнкү иймектигинин да бир учу (оң жаккы учу), жогору иймектигинин да бир учу (сол жаккы учу) болуп турат. Демек, ал — алмашуу чекити.

Жогоруда каралган функциянын иймектиги жөнүндөгү 1–3-теоремалар функциянын графиги менен ага жүргүзүлгөн жаныманын тыгыз байланышта экенин баяндап турат. Атап айтсак, f функциясынын $(x_0, f(x_0))$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси (34-чийме).

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

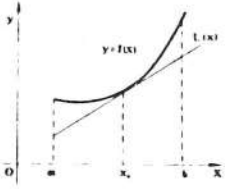
болорун билебиз. Барабардыктын оң жагын $L(x)$ деп белгилеп алсак, анда Лагранждын формуласын пайдаланып төмөнкүнү жаза алабыз:

$$f(x) - L(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

мында $\xi \in (0,1)$, $x, x_0 \in (a, b)$. Акыркы барабардыктын оң жагына дагы бир жолу Лагранждын формуласын пайдаланалы:

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

мында $\eta \in (\xi, x_0)$, $x_0 < \xi < 0$. Эми, эгерде $x \neq x_0$ болсо $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ орун аларын көрөбүз. Ошондуктан $f(x) - L(x)$ туюнтмасынын белгиси $f''(\eta)$ тин белгиси менен дал келип турат.



34-чийме

Ошондуктан, 1-теорема боюнча эгерде (a, b) интервалында f төмөнкү иймек функция болсо, анда $f(x) - L(x) \geq 0$ $(f(x) \geq L(x))$ экенин коробүз, ал эми (a, b) да f жогору багытталган иймек функция болсо, анда $f(x)-L(x)\leqslant 0$, $(f(x)\leqslant L(x))$ экенин коробүз.

Ушул эле айтылгандарды функциянын экинчи туундусу аркылуу да байланыштыра алабыз. Эгерде (a, b) интервалында $f''(x)>0$ болсо, анда $f(x)-L(x)\geqslant 0$ $(f(x)\geqslant L(x))$, ал эми $f''(x)<0$ болсо, анда $f(x)-L(x)\leqslant 0$ экенин алабыз.

Демек, функциянын графигинин бардык $(x, f(x))$ чекиттери функцияга $(x_0, f(x_0))$ чекитте жүргүзүлгөн жаныманын бир жагында гана жатышат: $f''(x)>0$ учурда — жогору жагында, $f''(x)<0$ учурда — томон жагында.

б) А л м а ш у у ч е к и т и н и н з а р ы л ш а р т ы.

4-теорема. *Эгерде f функциясы $x=x_0$ чекитинде үзгүлтүксүз экинчи туундуга ээ болсо жана анда $f''(x_0)=0$ барабардыгы орун алса, анда бул чекит — алмашуу чекити.*

○ Эгерде биз $f''(x_0)>0$ барабарсыздыгына ээ болсок, анда экинчи туундунун үзгүлтүксүздүгүне байланыштуу ал чекиттин $U_\delta(x_0)=\{x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta\}$ аймагы бар экенине жана $x\in U_\delta(x_0)$ учурда $f''(x)>0$ экенин алабыз, мында $\delta=\delta(\xi)>0$.

Демек, $U_\delta(x_0)$ интервалында f анык (төмөнгө) иймек функция, бул учурда x_0—алмашуу чекити боло албайт.

$f''(x_0)<0$ учур да ушул эле жол менен карама-каршылыкты туудурат. ●

в) А л м а ш у у ч е к и т т е р и н и н ж е т и ш т ү ү ш а р т т а р ы.

5-теорема. *Эгерде f функциясы $x=x_0$ чекитинде экинчи туундуга ээ болуучу функция болсо жана $f''(x)$ функциясы бул чекит аркылуу өткөндө өзүнүн белгисин өзгөртсө, анда x_0 — алмашуу чекити.*

○ Бизге берилген f функциясы x_0 чекитинин $U_\delta(x_0)=$ $=\{x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta\}$ аймагында экинчи туундуга ээ болсун. алсак $x\in U_\delta^-(x_0)=\{x_0-\delta<x<x_0\}$ учурда $f''(x)<0$, ал эми

$x \in U_\delta^+(x_0)$ учурда $f''(x) > 0$ болсун дейли. Анда, жогоруда далилденгендей эле (4-теореманы кара)

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

барабардыгы орун алат, мында $y = L(x)$ — жанымандын тең демеси: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. x жана ξ чекиттери x_0 дүн бир жагында жатышат, ошондуктан $x \neq x_0$ учурда $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$, демек,

$$Sgn\,[f(x) - L(x)] = Sgn\, f''(\eta),$$

мында $\xi < \eta < x_0$. Акыркы формулардан биз теореманын далилдөөсүн алабыз, себеби, эгерде $f''(\eta)$ функциясы x_0 чекитинде белгисин өзгөртсө, $f(x) - L(x)$ да белгисин өзгөртөт, б.а. $x_0 \in U_\delta^+(x_0) \Rightarrow f''(x) < 0$ болсо, анда $f(x) < L(x)$, ал эми $x \in U_\delta^-(x_0) \Rightarrow f''(x) > 0$ болот, б.а. $f(x) > L(x)$. Мунун өзү — x_0 — алмашуу чекити дегендик. Эгерде $f''(x)$ функциясы өзүнүн белгисин минустан плюска эмес, плюстан минуска өзгөрткөн учуру да жогоркудай эле ой жүгүртүүлөрдүн ыкмасы менен далилденет. ●

Далилденген теореманын алмашуу чекити бар болушу нун *биринчи жетиштүү шарты* деп аташат да, ал эми мындан кийинки далилдене турган теореманы анын экинчи жетиштүү шарты деп коюшат.

6-теорема. *Эгерде $f''(x_0) = 0$ жана $f'''(x_0) \neq 0$ шарттары аткарылса, анда x_0 алмашуу чекити болот.*

○ Бул теореманын далилдениүсү Тейлордун

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + 0((x - x_0)^3)$$

түрүндөгү формуласы аркылуу оңой жүргүзүлөт.

Мындан

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + 0((x - x_0)^3),$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Эми эгерде $x < x_0$ учурда акыркы барабардыктын оң жагы оң же терс мааниге ээ болот, демек, барабардыктын сол жагы $f(x) - L(x)$ ушундай касиетке ээ болот.

6. Асимптоталар.

а) Вертикалдык (тик) асимптота.

Эгерде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

шарттарынын бири орун алса, анда $x = x_0$ *түз сызыгы* $y = f(x)$ *функциясынын графигинин вертикалдык асимптотасы* деп айтабыз. Мисалы, $x = 0$ түз сызыгы $y = \frac{1}{x}$, $y = lgx^2$, $y = \frac{1}{x^2}$ функцияларынын графигинин вертикалдык асимптотасы, ал эми $x = -1$ болсо, $y = \frac{3-2x}{x+1}$ функциясынын графигинин вертикалдык асимптотасы жана $y = tgx$ функциясынын графигинин вертикалдык асимптотасы болсо $y = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$ $(\kappa \in Z)$.

б) Жантык асимптота. Биз $y = f(x)$ функциясынын графигинин $x \to +\infty$ да жантык асимптотасы деп

$$y = \kappa x + b$$

түз сызыгын айтабыз, эгерде төмөнкү шарт аткарылса:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\kappa x + b)] = 0. \qquad (1)$$

Мында сөзсүз $\kappa \neq 0$ болуш керек, ал эми $\kappa = 0$ болсо, анда $y = b$ түз сызыгы горизонталдык асимптота болот.

Ушул эле сыяктуу аныктаманы $x \to -\infty$ учурда да айтууга болот. Мисалы, $y=0$ түз сызыгы $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = a^x (a > 1)$ функцияларынын графигинин $x \to +\infty$ жана $y \to -\infty$ горизонталдык асимптотасы болот.

Ал эми $y = 1$ түз сызыгы $y = e^x$, $y = thx$ жана $y = cthx$ функцияларынын графигинин $x \to +\infty$ дагы горизонталдык асимптотасы жана $y = arcctgx$ функциясынын графигинин $x \to -\infty$ дагы горизонталдык асимптотасы $y = \pi$ түз сызыгы.

Теорема. *$y = \kappa x + b$ түз сызыгы $y = f(x)$ функциясынын графигинин $x \to +\infty$ да жантык асимптотасы болуш үчүн*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \kappa, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \kappa x] = b \tag{3}$$

шарттарынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ *Зарыл шарты.* Эгерде $y = \kappa x + b$ түз сызыгы $y = f(x)$ функциясынын графигинин $x \to +\infty$ да асимптотасы болсо, анда (1) шарт же ал шартка тең күчтүү

$$f(x) = \kappa x + b + \alpha(x), \ x \to +\infty, \ \alpha(x) \to 0 \tag{4}$$

шарты аткарылат. Бул (4) шарттын эки жагын мүчөлөп x ке бөлүп,

$$\frac{f(x)}{x} = \kappa + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$$

барабардыгын алабыз жана $x \to +\infty$ пределге өтсөк (2) пределдин аныкталышы келип чыгат. Ал эми (4) барабардыкты

$$f(x) - \kappa x = b + \alpha(x), \ x \to +\infty, \ \alpha(x) \to 0$$

жазып алып, $x \to +\infty$ да пределин алсак (3) предел аныкталат.

Жетиштүү шарты. Эгерде (2) жана (3) чектүү пределдер аныкталса, анда $f(x) - (\kappa x + b) = \alpha(x)$ барабардыгы орун алып, мунун өзү (1) шарт, анткени $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$. Бул болсо $y = \kappa x + b$ түз сызыгы $y = f(x)$ функциясынын графигинин асимптотасы экендигин далилдейт.

7. Функциялардын графиктерин түзүү.

Жогорудагы айтылган пункттардын негизинде берилген $y = f(x)$ функцияларын толук изилдеп, анын графиктерин төмөнкү план боюнча түзүү жетиштүү:

1. Функциялардын аныкталуу областтарын аныктоо. Анын жуптугун (тактыгын), мезгилдүүлүгүн билүү.

2. Графиктин координат октору менен кесилүү чекиттерин табуу жана $f(x)>0$, $f(x)<0$ болгон интервалдарын аныктоо.

3. Графиктин асимптоталарын табуу.

4. Графиктин эскизин түзүү.

5. $f'(x)$ туундусун эсептеп, экстремумдарды табуу жана функциянын өсүү (кемүү) интервалдарын аныктоо.

6. $f''(x)$ туундусун эсептеп, ийилүү чекиттерин жана ийрилиги төмөн (жогору) багытталган интервалдарды аныктоо.

1-мисал. $y\sqrt[3]{x^3-3x}$ функциясын толук изилдеп, графигин түзгүлө.

Δ Берилген функциянын аныкталуу областы бардык $R=(-\infty,\ +\infty)$ сан огу. Функция так, анткени ар кандай x үчүн $f(-x)=-f(x)$ шарты орун алат. Ошондуктан, берилген функциянын графиги координата башталмасына симметриялуу. График $0x$ огун $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ чекиттеринде кесип өтөт жана $-\infty<x<-\sqrt{3}$ интервалында $y<0$, ал эми $-\sqrt{3}<x<0$ интервалында $y>0$ жана $0<x<\sqrt{3}$ интервалында $y<0$, акыркы $-\sqrt{3}<x<0$ интервалында $y>0$.

Эми асимптоталарын аныктайлы. Бул функция вертикалдык асимптотага ээ болбойт. Жантык асимптотасын жогорку (2) жана (3) формулалар аркылуу аныктайбыз:

$$\kappa=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\kappa x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-1\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0.$$

Ошентип, графиктин "оң жаккы" асимптотасы $y=x$ түз сызыгы болот. Ушул эле сыяктуу, $x\to-\infty$ да κ жана b жогорку эле маанилерге ээ болорун эсептөө кыйынга турбайт. Анда графиктин "сол жаккы" асимптотасы да $y=x$ түз сызыгы.

Максимумдук жана минимумдук чекиттерин аныктайлы

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - 3x)^{2/3} \cdot (3x^2 - 3) = \frac{x^2 - 1}{(x^3 - 3x)^{2/3}}.$$

Туунду $x = -1$ жана $x = 1$ маанилеринде нөлгө айланат жана $x = -1$ чекити аркылуу солдон оңго өткөндө y' туунду белгисин + тан – ка өзгөртөт, ал эми $x = 1$ чекити аркылуу солдон оңго өткөндө y' белгисин – тан + ка өзгөртөт. Демек, $x = -1$ чекитинде максимум $y_{max} = \sqrt[3]{2}$, $x = 1$ чекитинде минимум $y_{min} = -\sqrt[3]{2}$. Туунду $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ маанилерде чексиздикке айланат, бирок ушул чекиттер аркылуу солдон оңго өткөндө белгисин өзгөртпөйт. Ошондуктан $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ чекиттеринде экстремум жок. Бул чекиттерде график вертикалдык жанымаларга ээ болот.

Экинчи тартиптеги туундусун табалы:

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^3 - 3x)^{5/3}}.$$

Ушул экинчи тартиптеги туунду нөлгө айланбайт, бирок $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ маанилерде аныкталган эмес жана ушул чекиттер аркылуу солдон оңго өткөндө y'' туунду белгисин өзгөртөт. Атап айтканда:

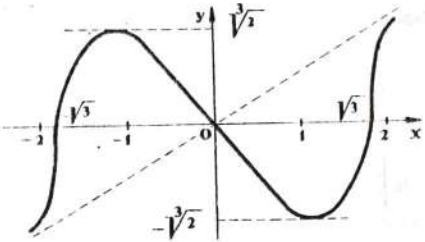
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' > 0$ графиктин ийметиги жогору багытталган;

$-\sqrt{3} < x < 0$, $y'' < 0$ графиктин ийметиги төмөн багытталган;

$0 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$ графиктин ийрилиги жогору багытталган;

$\sqrt{3} < x < +\infty$, $y'' < 0$ графиктин ийрилиги төмөн багытталган.

Эми берилген функциянын графигин накта түзөк болот (35-чийме). ▲



35-чийме

2-мисал. Параметрдик теңдеме менен берилген

$$\begin{cases} x = a\ cos^3 t, \\ y = a\ sin^3 t, \end{cases} \qquad \text{(а)}$$

ири сызыкты толук изилдеп, графигин түзгүлө.

Δ Мында $x(t)$ жана $y(t)$ функциялары t нын бардык маанилеринде аныкталган. Бирок $cos^3 t$ жана $sin^3 t$ функциялары мезгилдүү болгондуктан $0 \leq t \leq 2\pi$ аралыгын кароо жетиштүү. Бул убакта x тин жана y тин өзгөрүү областтары $[-a, a]$ аралыгы болот. Ошондуктан, каралып жаткан ийри сызык асимптотага ээ эмес. Эми туундусун табалы:

$$\begin{aligned} x'_t &= 3a\ cos^2 t\ sint, \\ y'_t &= 3a\ sin^2 t\ cost. \end{aligned} \qquad \text{(б)}$$

Бул туундулар $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ маанилерде нөлгө айланат.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -tgt. \qquad \text{(в)}$$

Изилдөө көрүнүктүү болуш үчүн таблица түзүп алалы:

t нын өзгөрүү областы	параметрге туура келген x тин өзгөрүү областы	параметрге туура келген y тин өзгөрүү областы	y'_x белгиси $y=f(x)$ функциясынын	мүнөзү
$0<t<\pi/2$	$a>x>0$	$0<y<a$	$-$	кемийт
$\pi/2<t<\pi$	$0>x>-a$	$a>y>0$	$+$	өсөт
$\pi<t<3\pi/2$	$-a<x<0$	$0>y>-a$	$-$	кемийт
$3\pi/2<t<2\pi$	$0<x<a$	$-a<y<0$	$+$	өсөт

Ушул таблицадан, (а) теңдеме эки үзгүлтүксүз $y=f(x)$ түрдөгү функцияны аныктайт жана $0\leqslant t\leqslant\pi$ аралыгында $y\geqslant 0$ (акыркы эки жолчону карагыла). Алдыңкы (б) формуладан

$$\lim_{t\to\pi/2} y'_t=\infty \quad \text{жана} \quad \lim_{t\to 3\pi/2} y'_t=\infty.$$

Ушул чекиттерде ийри сызыктын жанымасы вертикалдуу болот. Мындан башка $t=0,\ \pi,\ 2\pi$ чекиттеринде $y'_t=0$. Бул чекиттерде ийри сызыктын жанымасы горизонталдуу. Экинчи тартиптеги туундусун табалы:

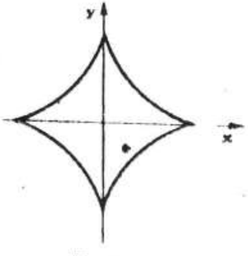
$$y''_{x^2}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

Мындан

$0<t<\pi$ аралыгында $y''_{x^2}>0$ ийри сызык томпок,

$\pi<t<2\pi$ аралыгында $y''_{x^2}<0$ ийри сызык иймек.

Ушул изилдөөлөрдүн негизинде (а) теңдемесинин графигин түзөбүз. Ал ийри сызык *астроида* деп аталат (36-чийме).



36-чийме.

V ГЛАВА

КӨП АРГУМЕНТТҮҮ ЖАНА АЙКЫН ЭМЕС ФУНКЦИЯЛАР

§ 1. КӨП ӨЛЧӨМДҮҮ МЕЙКИНДИКТЕР

Жаратылышты таануу илиминде көпчүлүк учурларда экиден көп болгон өзгөрүлмө чоңдуктардын өз ара функционалдык көз карандылыгын кароого туура келет. Мисалы, тик бурчтуктун аянты анын x узундугунан жана y бийиктигинен көз каранды, б.а. $s = s(x, y)$ эки аргументтен көз каранды болгон функция. Ошондой эле кандайдыр бир нерсенин физикалык мүнөздөмөсүн (айталык, анын ρ тыгыздыгын же T температурасын) карасак, анда ал нерсенин бир чекитинен экинчи чекитине өткөндөгү анын өзгөрүлүүсүн эске алууга туура келет. Ал эми мейкиндиктеги чекиттин жайлануу орду, x, y, z декарттык координаталары менен аныкталары бизге белгилүү, ошондуктан каралуучу физикалык мүнөздөмө чоңдуктар (ρ тыгыздыгы же T температурасы) x, y, z үч өзгөрүлмө чоңдуктары менен аныкталат.

Ушул эле сыяктуу убакыттан да көз каранды болгон мейкиндиктеги физикалык кубулуштардын болуп өтүшү, x, y, z жана t төрт өзгөрүлмө чоңдуктарынан көз каранды болот. Мисалы, газдын үндүк термелүүсүн изилдегенде, ал газдын ρ тыгыздыгы жана P басымы төрт өзгөрүлмө x, y, z жана t чоңдуктары менен аныкталышат.

Жогоруда келтирилген сыяктуу жаратылыштын закон ченемдүүлүктөрүн изилдөө үчүн көп аргументтүү функциялар түшүнүгү киргизилип, ага тийиштүү болгон математикалык аппарат өркүндөтүлгөн. Көп аргументтүү функциялар көп өлчөмдүү мейкиндиктерде аныкталгандыктан ошого токтололу.

1. Вектордук n өлчөмдүү мейкиндиги.

Чыныгы сандардын көптүгү $\{X\}$, б.а. сандык ок — бир өлчөмдүү $R = R_1$ мейкиндигин түзүп жана анда бир аргументтүү функциясы аныкталары бизге белгилүү (III гл. § 1). Ал эми, иреттелген эки чыныгы сандардын (x_1, x_2) көптүгү, б.а. тегиздик — эки өлчөмдүү R_2 мейкиндигин жана иреттелген үч чыныгы сандардын (x_1, x_2, x_3) көптүгү, б.а. биз жашаган мейкиндик — үч өлчөмдүү R_3 мейкиндигин түзүшөт. Ушул келтирилген мейкиндиктерди жалпылап, иреттелген чыныгы n сандарынын $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көптүгүн n өлчөмдүү координаттык R_n мейкиндиги дейлик. Эгерде R_n де координаттык кошуу жана чыныгы санга (скалярга) көбөйтүү амалдарын төмөнкүчө аныктасак:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad (1)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \quad (2)$$

анда R_n ди n өлчөмдүү вектордук мейкиндик деп да кароого болот, б.а. анын $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементин n координаталуу чекит же вектор десе да болот. Эгерде $n = 2$ жана 3 болсо, анда (1) жана (2) амалдары радиус-векторлорду кошуу жана радиус-векторду чыныгы санга көбөйтүү амалдарына туура келет. Мында, нөлдүк элементи болуп $0 = (0,0,\ldots,0)$ чекити же ноль-вектору эсептелет. R_n вектордук мейкиндигинде $e^1 = (1,0,\ldots,0)$, $e^2 = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $e^n = (0,0,\ldots,1)$ векторлору стандарттык базисти түзүшөт да, жалпы түрдө $e^\kappa = (\delta_1^\kappa, \delta_2^\kappa, \ldots, \delta_n^\kappa)$ жазылат, мында δ_n^κ — Кронекердин символу, б.а.

$$\delta_n^\kappa = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } \kappa = n, \\ 0, & \text{эгерде } \kappa \neq n. \end{cases}$$

Анда, R_n дин ар кандай $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементин $e^1, e^2, \ldots, e^n$ векторлорунун сызыктуу комбинациясы аркылуу $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x e_2 + \ldots + x_n e_n$ бир түрдө гана туюнтса болот. Ошентип, R_n чыныгы сандар R талаасындагы n өлчөмдүү вектордук мейкиндик.

2. Скалярдык көбөйтүндү.

R_n мейкиндигинде скалярдык көбөйтүү амалын аныктоого да болот.

1-аныктама. *Эгерде R_n мейкиндигинин ар кандай x, y эки элементине туура келүүчү чыныгы санды алуучу эреже (x, y) символу менен белгиленип, төмөнкүдөй төрт аксиоманы канааттандырса:*

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $\forall x, y, z \in R_n$,

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\forall x, y \in R_n$, $\lambda \in R$;

3) $(x, y) = (y, x)$, $\forall x, y \in R_n$;

4) *эгерде $x \in R_n$ жана $x \neq 0$, анда $(x, x) > 0$ аны R_n мейкиндигиндеги скалярдык көбөйтүү амалы дейбиз.*

Индукция боюнча 1), 2) аксиомаларын ар кандай чектүү сандагы суммаларга жайылтууга болот:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n, y) = (x_1, y) + (x_2, y) + ... + (x_n, y);$$

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y) + ... + \lambda_n(x_n, y).$$

Мында $n \in \mathbb{N}$ жана $x_1, x_2, ..., x_n, y \in R_n$. Бул 1) аддитивдүүлүк жана 2) бир тектүүлүк аксиомаларынан скалярдык көбөйтүү амалынын экинчи көбөйтүүчүсү фиксирленгенде, биринчи көбөйүүчүсү боюнча сызыктуу, ал эми 3) симметриялуулуктун аксиомасынын негизинде биринчи көбөйүүчүсү фиксирленгенде экинчи көбөйүүчүсү боюнча сызыктуу экендигин көрөбүз. Демек, скалярдык көбөйтүү амалы (x, y) — бисызыктуу (кош сызыктуу) форма болуп эсептелет. Эгерде 2) аксиомада $\lambda = 0$ десек, ар кандай $y \in R_n$ үчүн $(0, y) = 0$ ал эми 3) аксиоманын негизинде ар кандай $y \in R_n$ үчүн $(y, 0) = 0$. Мындан $(0, 0) = 0$. Ошентип, 4) аксиоманын негизинде $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Вектордук R_n мейкиндигиндеги ар кандай $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ жана $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ эки аргумент үчүн стандарттык скалярдык көбөйтүү

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad (3)$$

формуласы менен аныкталат. Мында $n = 1$ болсо, чыныгы сандардын кадимки көбөйтүндүсүн $(x, y) = x_1 y_1$ алабыз, ал эми $n = 2$ жана $n = 3$ болсо, анда эки вектордун тегиздиктеги жана мейкиндиктеги скалярдык көбөйтүндүсүн алабыз, б.а. алардын бир аттуу аргументтеринин көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар. Мындан башка дагы формулалар менен аныкталган көптөгөн скалярдык көбөйтүүлөр кездешет.

3. Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы.

1-теорема (Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы). *Чыныгы вектордук X мейкиндигинде (x, y) скалярдык көбөйтүндүсү үчүн*

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \tag{4}$$

Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы орун алат.

○ Скалярдык көбөйтүндүнүн аксиомаларынын негизинде бардык $\lambda \in R$ үчүн

$$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \tag{5}$$

барабарсыздыгы орун алат. Эгерде $(x, x) \neq 0$ болсо, анда $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(x, x)}$ болгондо, (5) тен төмөнкүнү алабыз,

$$-\frac{(x, y)^2}{(x, x)} + (y, y) \geq 0.$$

Мындан, (4) чү келип чыгат. Ал эми $(x, x) = 0$ болсо, анда бардык $\lambda \in R$ үчүн (5) төмөнкүнү алабыз:

$$-2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Бул барабарсыздык орун алат, качан гана $(x, y) = 0$ болсо. Ошентип, бул учурда да (4) (барабардыгы) орун алат. ●

Э с к е р т ү ү. Эгерде x, y векторлору сызыктуу көз каранды болушса, анда (4) тө барабардык белгиси орун алат.

Коши-Буняковскийдин (4) барабарсыздыгы R_n мейкиндигинде төмөнкүчө болот:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \tag{5}$$

4. Нормалуу мейкиндик.

Чыныгы вектордук мейкиндиктеги скалярдык көбөйтүндү норманы жаратат.

2-аныктама. *Чыныгы вектордук X мейкиндигинин ар бир элементине, $x \in X$ чыныгы $\|x\|$ санын тийиштүүлөп,*

1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X.$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\forall x \in X$, $\lambda \in R$,

3) *Эгерде* $x \in X$ *болуп*, $x \neq 0$ *болсо, анда* $\|x\| \neq 0$ *шарттары аткарган функцияны ошол мейкиндиктеги норма дейбиз. Жогорудагы 2) аксиомадан* $\|0\| = 0$ *экендигин алабыз жана 1-2) аксиомаларынан* $0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$, *мындан бардык* x *үчүн* $\|x\| \geq 0$ *болорун алабыз. Ал эми 3) аксиомасын эске алсак, анда* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *болот.*

2-теорема. *Эгерде* (x, y) *чыныгы* X *мейкиндигинин скалярдык көбөйтүндүсү болсо, анда*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{6}$$

ал мейкиндиктин нормасы болот.

○ Скалярдык көбөйтүндүнүн 4-аксиомасынын негизинде $(x, x) \geq 0$ туюнтма (6) аныкталган болот. Теореманы далилдөө үчүн норманын аксиомаларынын аткарылышын текшерели:

1) Скалярдык көбөйтүндүнүн 1-жана 3-аксиомаларынын жана Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгынын негизинде

$$(x + y,\ x + y) = (x,\ x) + 2(x,\ y) + (y,\ y) \leq (x,\ x) + 2\sqrt{(x,\ x)(y,\ y)} +$$
$$+ (y,\ y) = \left(\sqrt{(x,\ x)} + \sqrt{(y,\ y)}\right)^2$$

Мындан, төмөнкүнү алабыз

$$\sqrt{(x + y,\ x + y)} \leq \sqrt{(x,\ x)} + \sqrt{(y,\ y)}.$$

2) Скалярдык көбөйтүндүнүн 2-жана 3-аксиомалары боюнча

$$\sqrt{(\lambda x,\ \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,\ x)} = |\lambda| \sqrt{(x,\ x)} = |\lambda|\ \|x\|.$$

3) Эгерде $x \in X$ жана $x \neq 0$ болсо, анда скалярдык көбөйтүндүнүн 4-аксиомасы боюнча $(x,\ x) > 0$ ошондуктан

$$\|x\| = \sqrt{(x,\ x)} \neq 0.$$

Туюнтма (6) скалярдык көбөйтүндү жараткан норма деп атайбыз.

R_n мейкиндиктеги скалярдык көбөйтүндү жараткан норма төмөнкүдөй

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n} x_{\kappa}^{2}}. \tag{7}$$

Муну биз R_n деги Евклиддин нормасы дейбиз.

3-аныктама. *Норма аныкталган чыныгы вектордук мейкиндикти нормаланган же нормалуу мейкиндик деп айтабыз.*

5. Метрикалуу мейкиндик.

Чыныгы вектордук мейкиндиктеги норма элементтеринин арасындагы аралыкты жаратат.

4-аныктама. *Чыныгы вектордук X мейкиндигинин ирееттелген эки x, y элементтерине тийиштүү болгон чыныгы $\rho(x, y)$ санын аныктап, төмөнкүдөй аксиомаларды:*

1) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

канааттандырган функцияны X мейкиндигинин метрикасы (x менен y тин ортосундагы аралык) дейбиз.

Эгерде 1-аксиомада $z = x$ десек, анда 2-аксиоманы эске алсак $\rho(x, y) \leq \rho(x, x) + \rho(y, x) = \rho(y, x)$. Мындан, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ бардык $x, y \in X$ үчүн орун алат, б.а. x тен y ке чейинки аралык y тен x ке чейинки аралыкка барабар. Кээде 1-аксиоманын барабарсыздыгын

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \tag{8}$$

үч бурчтуктардын барабарсыздыгы деп да коюшат (үч бурчтуктун бир жагынын узундугу калган эки жагынын узундуктарынын суммасынан ашпайт).

3-теорема. *Эгерде чыныгы вектордук X мейкиндигинде $\|x\|$ нормасы берилсе, анда*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{9}$$

X мейкиндиги метрика болот.

○ Метриканын аксиомаларынын аткарылышын текшерели:

1) $x - y = (x - z) + (z - y)$ болгондуктан, норманын аксиомалары боюнча

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - z\| + \|y - z\|,$$

2) $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$

5-аныктама. *Метрикасы аныкталган куру эмес көптүктү метрикалык мейкиндик дейбиз.*

Жекече учурда, R_n мейкиндигиндеги Евклиддин нормасы

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \qquad (10)$$

стандарттык (кадимки) метриканы берет. Эгерде n=1, 2, 3 болсо, анда (10) формуласынан октогу, тегиздиктеги жана мейкиндиктеги чекиттеринин арасындагы аралыктарга ээ болобуз. Ошондой эле (9) метрикасынан $\|x - 0\| = \|x\|$, 0 дөн x ке чейинки аралыкты же, б.а. x векторунун модулун (узундугун) алабыз.

6-аныктама. *Скалярдык көбөйтүндү Евклиддин нормасы жана метрикасы аныкталган R_n мейкиндиги, Евклиддин n өлчөмдүү мейкиндиги деп аталат.*

§ 2. КӨП ӨЛЧӨМДҮҮ МЕЙКИНДИКТЕГИ КӨПТҮКТӨР ЖАНА УДААЛАШТЫКТАР

Бир аргументтүү функция бир өлчөмдүү Евклиддин $R_1 = R$ мейкиндигинин $\{X\}$ көптүгүндө каралгандыгы бизге белгилүү (III глава, § 1), ал эми n аргументтүү функция Евклиддин n өлчөмдүү R_n мейкиндигинин $\{M\}$ көптүгүндө аныкталат.

1. Көптүктөр жөнүндөгү негизги түшүнүктөр.

1-аныктама. *Мейли X, метрикасы $\rho(x,\ y)$ болгон чыныгы вектордук мейкиндик жана $r > 0$ саны берилсин. Анда анын элементтеринен аныкталган көптүгү*

$$U(a,\ z) = \{x \in X : \rho(a,\ x) < r\} \qquad (11)$$

радиусу r жана борбору a болгон X мейкиндигинин ачык шары деп аталат.

Стандарттык метрикасы менен берилген R_n мейкиндигинде ачык шар

$$U(a, r) = \{x \in R_n: \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)^2 < r^2\}. \qquad (12)$$

Жекече учурларда: $n = 1$ болсо $U(a, r) =]a - r, a + r[$ интервалын; $n = 2$ болсо, $U(a, r) = \{(x_1, x_2) \in R_2: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 < r^2\}$ — ачык тегеректи жана $n = 3$ болгондо

$$U(a, r) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R_n: (x_1 - a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\}$$

— ачык шарды берет. Ал эми $\{x \in R_n: \rho(x, a) = r\}$ болсо, анда сфера болот. Мындан $n = 2$ жана 3 болгон айлананы жана сфераны алабыз.

2-аныктама. *Метрикалык мейкиндиктин $U(a, \varepsilon)$ ачык шарын a чекитинин ε аймагы дейбиз.*

Мисалы. Метрикасы кадимки аралык менен берилген R мейкиндигинин a чекитинин ε аймагы $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ интервалы болот, ал эми R_2 деги (a_1, a_2) чекитинин ε аймагы болуп $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2$ ачык тегерек болуп эсептелет.

3-аныктама. *Метрикалык X мейкиндигинин a чекитинин аймагы болуп ошол чекиттин ε — аймагын камтыган ар кандай көптүгү болот.*

Мисалы a чекитинин аймагы, борбору a жана радиусу r болгон $U(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) < r\}$ — туюк шар. Евклиддин R_n мейкиндигиндеги a чекитинин ε — аймагын кубдун жардамы менен да аныктаса болот.

4-аныктама. *Борбору a жана жактары $2h$, $(h > 0)$ болгон R_n мейкиндигине ачык куб деп*

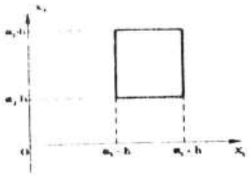
$$Q(a, h) = \{x \in R_n: |x_k| < h, (k = 1, 2, \dots, n)\} \qquad (13)$$

көптүгүн айтабыз.

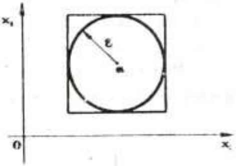
Мында $n = 1$ болсо, $Q(a, h) =]a - h, a + h[$ интервал жана $n = 2$ болсо, $Q(a_1, a_2, h) = \{(x_1, x_2) \in R_2 / a_1 - h < x_1 < a_2 + h,$ $a_2 - h < x_2 < a_2 + h\}$ ачык квадрат (37-чийме). Ал эми $n = 3$ болсо, анда

$$Q(a_1, a_2, a_3, h) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R_3 / a_1 - h < x_1 < a_1 + h, a_2 - h < x_2 < a_2 + h, a_3 - h < x_3 < a_3 + h\}$$

ачык куб.



37-чийме



38-чийме

Ар бир R_n мейкиндигиндеги $Q(a, \varepsilon)$ кубу, ошол a чекитинин аймагы боло алат, себеби $Q(a, \varepsilon) \supset U(a, \varepsilon)$ (38-чийме).

Чындыгында,

$$|x_\kappa - a_\kappa| \le \|x - a\| = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{n}(x_\kappa - a_\kappa)^2}, \ \kappa = 1, 2, \ldots, n$$ болгондуктан, $\|x - a\| < \varepsilon$ болсо, анда бардык $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ үчүн $|x_\kappa - a_\kappa| < \varepsilon$ болот, б.а. $x \in U(a, \varepsilon)$, анда $x \in Q(a, \varepsilon)$. $Q(a, \varepsilon)$ көптүгүн a чекиттик кубдук аймагы деп коюшат.

Ошентип, a чекитинин кубдук аймагы анын ε аймагын камтыйт, ал эми a чекитинин ε — аймагы да анын кандайдыр бир кубдук аймагын камтыйт (38-чийме).

5-аныктама. *а) Эгерде a чекити менен бирге анын ε аймагы Евклиддин R_n мейкиндигинин $\{M\}$ көптүгүндө жатса, анда a чекитин $\{M\}$ көптүгүнүн ички чекити дейбиз.*

б) Ал эми a чекити менен бирге анын ε — аймагы $\{M\}$ көптүгүндө жатпаса, анда a чекитин $\{M\}$ дин тышкы чекити дешет.

в) Эгерде a чекитинин ε аймагынын $\{M\}$ көптүгүндө жаткан дагы жана жатпаган дагы чекити болсо, анда a чекити $\{M\}$ көптүгүнүн чек аралык чекити деп аталат.

Мисалы, борбору a чекити жана радиусу r болгон n өлчөмдүү сфера, борбору a, радиусу r болгон ачык шардын да жана туюк шардын да чек арасы болот.

6-аныктама. *Ички гана чекиттерден турган ар кандай $\{M\}$ көптүгүн ачык көптүк дешет жана ал өзүнүн ар кандай чекитинин ачык аймагы болот.*

7-аныктама. *Чек аралык чекиттердин бардыгын өзүнө туткан көптүк туюк көптүк деп аталат.*

Мисалы, R_n мейкиндигиндеги $U(a, r)$ туюк шары — туюк көптүк.

Бул аныктамага эквиваленттүү болгон туюк көптүктүн аныктамасын чектик чекиттер аркылуу да берсе болот.

8-аныктама. *Эгерде a чекитинин ар кандай ε аймагы a дан башка {M} көптүгүнүн жок дегенде бир чекитин тутса, анда a чекити R_n мейкиндигиндеги {M} көптүктүн чектик чекити деп айтабыз.*

Ошентип, *{M}* көптүгү өзүнүн бардык чектик чекиттерин тутса, анда ал туюк көптүк болот.

9-аныктама. *Эгерде {M} көптүгүнүн бардык элементтерин камтыгандай n өлчөмдүү шар табылса, анда {M} чектелген көптүк деп аталат.*

10-аныктама. *R_n мейкиндигиндеги {M} көптүгүнүн ар кандай эки чекитин, бардык чекиттерин {M} де жаткан үзгүлтүксүз ийри сызык менен туташтыра алсак, анда {M} ди бир байланыштагы көптүк дейбиз.*

11-аныктама. *R_n мейкиндигиндеги ар кандай ачык жана бир байланыштагы {M} көптүгү область болот. Ал эми, ал көптүккө анын бардык чек аралык чекиттерин бириктирсек, {M} туюк областын алабыз.*

Мисалы, *n* өлчөмдүү ачык шар жана ачык куб — ачык, чектелген жана бир байланыштагы көптүктөр, б.а. R_n мейкиндигиндеги областтар. Ал эми *n* өлчөмдүү туюк шар жана туюк куб R_n мейкиндигиндеги туюк областтар болот; ар кандай чектелген областтын мейкиндигине чейинки толуктоосу чектелбеген туюк көптүк; мейкиндиктеги өз ара кесилишпеген эки область бир байланыштагы эмес көптүгүнө мисал боло алат.

2. Удаалаштыктар жана анын жыйналуусу.

Евклиддин R_n мейкиндигиндеги чекиттердин удаалаштыгы төмөнкүчө аныкталат.

$$\{x^m\} = \{x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m\}, \ m = 1, 2, \dots, \qquad (14)$$

б.а. удаалаштык бул элементтери кандайдыр бир эреженин негизинде иреттелип жайланышкан көптүк. Мында, $n = 1$ болсо, R деги чыныгы сандардын удаалаштыгын алабыз. Ал эми $n = 2$ жана $n = 3$ болсо, R_2 деги (тегиздигиндеги) жана R_3 мейкиндигиндеги чекиттердин удаалаштыктарын алабыз, б.а. $\{x_1^m, x_2^m\}$ жана

$$\{x_1^m, x_2^m, x_3^m\},\ m=1,\ 2,\ .$$

Сан удаалаштыктар учурундагы сыяктуу эле камтылган удаалаштыктын түшүнүгүн аныктаса болот. Эгерде $\{M_m\}$ удаалаштыгынын кээ бир элементтеринен $\{M_{mk}\}$ жаңы удаалаштыгын түзсөк, анда аны $\{M_m\}$ удаалаштыгынын камтылган удаалаштыгы $\{M_{mk}\}$ дейбиз, б.а. $\{M_{mk}\}\subset\{M_m\}$.

12-аныктама. *Эгерде*

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^m, x)=0 \tag{15}$$

болсо, анда $x\in R_n$, $\{x^m\}$ удаалаштыгынын предели (чеги) деп аталат жана төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{m\to\infty} x^m = x. \tag{16}$$

Бул учурда $\{x^m\}$ удаалаштыгы x ке жыйналат дешет жана мындай удаалаштыктарды жыйналуучу удаалаштыктар деп аташат. Жогорудагы (15) шарты, ар кандай $\varepsilon>0$ саны үчүн (б.а. x чекитинин ар кандай ε аймагы $U(x,\varepsilon)$ үчүн) m_0 номери табылып, бардык $m\geqslant m_0$ үчүн $\rho(x^m, x)<\varepsilon$ барабарсыздыгы орун аларын көрсөтөт.

R_n мейкиндиктеги чекиттердин $\{M_m\}=\{x^m\}$ удаалаштыгынын түшүнүгүн алардын координаталарынын сан удаалаштыктары аркылуу да берүүгө болот.

1-теорема. *Эгерде R_n мейкиндигинин $\{x^m\}$ удаалаштыгы a чекитине жыйналса, анда анын координаталарынын $\{x_1^m\}, \{x_2^m\}, \ldots, \{x_n^m\}$ удаалаштыктары a чекитинин тийиштүү $a_1, a_2, \ldots, a_n$ координаталарына жыйналышат жана ага тескерисинче, эгерде $\{x_1^m\}, \{x_2^m\}, \ldots, \{x_n^m\}$ удаалаштыктары тийиштүү $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сандарына жыйналса, анда $\{x^m\}$ удаалаштыгы $a\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чекитине жыйналат.*

○ 1) Мейли, $\{x^m\}$ чекиттеринин удаалаштыгы a чекитине жыйналсын дейлик. Анда ар кандай $\varepsilon > 0$ санына m_0 номери табылып, бардык $m \geq m_0$ үчүн $\rho(x^m, 0) < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алат, б.а.

$$\sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + (x_2^m - a_2)^2 + ... + (x_n^m - a_n)} < \varepsilon. \tag{17}$$

Бул (17) ден, бардык $m \geq m_0$ үчүн

$$|x_1^m - a_1| < \varepsilon,\ |x_2^m - a_2| < \varepsilon,\ ...,\ |x_n^m - a_n| < \varepsilon$$

экендиги келип чыгат, б.а. $\{x_1^m\}$, $\{x_2^m\}$, ..., $\{x_n^m\}$ координаталык удаалаштыктар a чекитинин тийиштүү $a_1, a_2, ..., a_n$ координаталарына жыйналышат. ●

2) Координаталардын $\{x_1^m\}$, $\{x_2^m\}$, ..., $\{x_n^m\}$ удаалаштыктары a чекитинин тийиштүү $a_1, a_2, ..., a_n$ координаталарына жыйналсын. Анда ар кандай $\varepsilon > 0$ санына $m_1, m_2, ..., m_n$ сандары табылып, бардык $m \geq m_1$, $m \geq m_2, ..., m \geq m_n$ үчүн тийиштүү

$$|x_1^m - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ |x_2^m - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\ ...,\ |x_n^m - a_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

барабарсыздыктары орун алат. Эгерде мында $m \geq m_0 = \max\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ болсо, анда $\rho(x^m, a) < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алары көрүнүп турат. Ошентип, $\{x^m\}$ удаалаштыгы a чекитине жыйналуусун алдык.

13-аныктама. *Эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ санына m_0 номери табылып, бардык $m \geq m_0$ жана ар кандай бүтүн $p \geq 0$ сандары үчүн $\rho(x^m, x^{m+p}) < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алса, анда n өлчөмдүү Евклиддин мейкиндиктеги чекиттердин $\{x^m\}$ удаалаштыгы фундаменталдык же Кошинин удаалаштыгы деп аталат.*

Евклиддин мейкиндигиндеги чекиттердин $\{x^m\}$ удаалаштыктары үчүн Кошинин критерийин далилдөөсүз келтирели.

2-теорема. *Евклиддин n өлчөмдүү мейкиндигинин чекиттеринин $\{x^m\}$ удаалаштыгы $a \in R_n$ чекитине жыйналуусу үчүн ошол $\{x^m\}$ — фундаменталдык удаалаштык болушу* *зарыл жана жетиштүү болот* ($n = 1$ учурду II глава, § 3, 4 кара).

Эми чектелген удаалаштыктын негизги касиетине токтололу.

3-теорема. (Больцано-Вейерштрасстын теоремасы). *Евклиддин n өлчөмдүү мейкиндигиндеги чекиттердин $\{x^m\}$ чектелген удаалаштыгынан жыйналуучу камтылган удаалаштыкты бөлүп алууга болот.*

○ Биринчиден, $\{x^m\} = \{x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m\}$ чектелген удаалаштыгын чектелген көптүк десек, анда анын бардык элементтерин камтыган, борбору O чекити жана радиусу r болгон шар табылат; $\rho(O, x^m) \leq r$ мында $\rho(O, x^m) = \sqrt{(x_1^m)^2 + (x_2^m)^2 + \ldots + (x_n^m)^2}$ болгондуктан, бардык m үчүн $|x_1^m| < r$, $|x_2^m| < r$, ..., $|x_n^m| < r$, $m = 1, 2, \ldots$ барабарсыздыктары келип чыгат. Бул координаталык $\{x_1^m\}$, $\{x_2^m\}$, ..., $\{x_n^m\}$ удаалаштыктары чектелгендигин көрсөтөт. Сандык удаалаштыктар үчүн болгон Больцано-Вейерштрасстын теоремасынын негизинде координаталык удаалаштыктардын ар биринен тийиштүү $\{x_1^{m_1}\}$, $\{x_2^{m_2}\}$, ..., $\{x_n^{m_n}\}$ жыйналуучу камтылган удаалаштыктарды бөлүп алууга болот. Мында $\{x_1^{m_1}\}$ удаалаштыгы a_1 чегине умтулат; $\{x_2^{m_2}\} \to a_2$, ..., $\{x_n^{m_n}\} \to a_n$ дейлик.

Анда, 1-теореманын негизинде $\{x^m\}$ удаалаштыгы координаталары $a_1, a_2, \ldots, a_n$ болгон a чекитине умтулат.

Эскертүү. Эгерде $\{x^m\}$ удаалаштыгынын бардык элементтери $\{M\}$ туюк көптүгүндө жатса, анда анын чеги a дагы $\{M\}$ көптүгүндө жатат. Анткени a чекитинин ар кандай ε — аймагы $\{x^m\}$ удаалаштыгынын элементтерин өзүнө тутат, б.а. a чекити $\{M\}$ көптүгүнүн же ички, же чек аралык чекити болот. Демек, $\{M\}$ туюк болгондуктан, $a \in \{M\}$.

Евклиддин R_n мейкиндигиндеги чектелген туюк көптүктүн бул касиетин анын компакттуулугу, ал эми өзүн болсо компакт деп аташат. Мисалы, R_n деги туюк куб компакт болот.

14-аныктама. *Эгерде n өлчөмдүү кубдардын* $\{Q_m(a,\ h_m)\}$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ *удаалаштыгынын мурункусу кийинкисин камтыса*

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_m \supset \ldots,$$

анда аны камтышкан кубдардын удаалаштыгы дейбиз.

4-теорема. $m \to \infty$ *жактарынын узундугу* $d_n \to 0$ *нөлгө умтулган камтылышкан туюк кубдардын* $\{Q_m(a,\ h)\}$ *удаалаштыгы үчүн бардык кубдарында жаткан бир гана* $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ *чекити табылат.*

○ Мейли

$$\{Q_m(a,\ h)\}=\{x \in R_n \,/\, \left|x_\kappa^m - a_\kappa^m\right| < h^m,\ \kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (18)$$

кубдары туюк камтылган удаалаштык болуп, анын жактарынын узундугу $\lim\limits_{m\to\infty} d^m = \lim\limits_{m\to\infty} 2h^m = 0$ болсун, анда

$$[a_i^m - h^m,\ a_i^m + h^m],\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

кесиндилери камтылган болушуп, узундуктары $d^m \to 0$ качан $m \to \infty$.

Ошондуктан ар бир камтылган кесиндилердин удаалаштыгында бирден гана чекит табылат, б.а. $\xi_i \in [a_i^m - h^m,\ a_i + h^m]$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $m=1,\ 2,\ \ldots$. Мындан бир гана $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ чекити (18) удаалаштыгынын бардык кубдарында жаткандыгы келип чыгат. ●

§ 3. КӨП АРГУМЕНТТҮҮ ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ ЖАНА ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

1. Көп аргументтүү функциянын аныктамасы.

Мурдагы параграфтарда келтирилген түшүнүктөрдүн жардамы менен көп аргументтүү функцияны төмөнкүчө аныктайбыз.

1-аныктама. *Эгерде Евклиддин n өлчөмдүү* R_n *мейкиндигиндеги* $\{M\}$ *көптүгүнүн ар бир* $x \in R_n$ *чекитине белгилүү* *болгон закондун негизинде кандайдыр бир сан $y \in \{Y\} \subset R$ туура келсе, анда $\{M\}$ көптүгүндө $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы аныкталган деп айтабыз.*

Мындагы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ аргумент, y функция жана $\{M\}$ көптүгү f функциясынын аныкталуу областы, ал эми $\{Y\}$ функциянын маанилеринин областы. Мында $n = 2, 3$ болсо, тийиштүү түрдө эки жана үч аргументтүү функцияны алабыз.

Көп аргументтүү функцияларга **м и с а л д а р** келтирели.

1) $y = ln[cos\,(x_1^2 + x_2^2)]$ эки аргументтүү функция анын аныкталуу областы $cos\,(x_1^2 + x_2^2) > 0$ барабарсыздыгын канааттандыруучу чекиттердин көптүгү болот. Бул барабарсыздык төмөнкү барабарсыздыктарга эквиваленттүү:

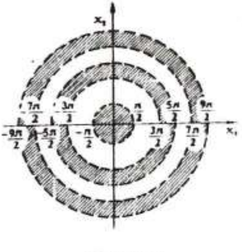
$$0 < (x_1^2 + x_2^2) < \frac{\pi}{2},$$

$$2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x_1^2 + x_2^2 < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \ \kappa = 1,\ 2,\ \dots\ .$$

Ошентип, берилген функциянын аныкталуу областы радиусу $\frac{\pi}{2}$ жана борбору $0\,(0,\ 0)$ чекитинде ачык тегеректен жана алкак түрүндөгү ачык областтардан турат (39-чийме).

2) $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}$ функциясы n аргументтүү, аныкталуу областы $Q(0,\ 1) = \{(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\ \in R_n\!: x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leqslant 1\}$ радиусу 1 ге барабар, борбору $0\,(0,\ 0,\ \dots,\ 0)$ чекити болгон туюк шар.

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}$ үч аргументтүү функциясынын аныкталуу областы радиусу 2ге барабар, борбору $0\,(0,\ 0,\ 0)$ чекити болгон сферанын бардык чекиттери кирбеген R_3 мейкиндиги болот, б.а. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.



39-чийме

Ошентип, функциянын аныкталган бир мааниси туура келүүчү R_n мейкиндигинин чекиттеринин $\{M\}$ көптүгү функциянын аныкталуу областы болорун көрдүк.

2. Көп аргументтүү функциянын предели (чеги).

Евклиддин R_n мейкиндигинин $\{M\}$ көптүгүндө аныкталган $y = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы жана $\{M\}$ көптүгүнүн чектик чекити $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ берилсин дейлик.

2-аныктама. *Эгерде а чекитине умтулуучу* $\{M\}$ *көптүгүнүн ар кандай* $\{x^m\} = \{x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m\}$, $m = 1, 2, ...$ *удаалаштыгы, б.а.* $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = a$ *болуп жана ага туура келүүчү* $\{f(x^m)\}$ *сан удаалаштыгы А санына умтулса, анда А саны* $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *функциясынын* $\{M\}$ *көптүгү боюнча а чекитиндеги предели деп аталат.*

Бул айтылганды төмөнкүчө жазууга болот:

$$\lim_{x\to a,\ x\in\{M\}} f(x) = A \quad \text{же} \quad \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A. \tag{19}$$

Функциянын пределин Гейне тарабынан берилген 2-аныктамасын Коши боюнча да аныктоого болот.

3-аныктама. *Эгерде ар кандай* $\varepsilon > 0$ *саны үчүн* $\delta > 0$ *саны табылып,* $\{M\}$ *көптүгүнүн ар кандай* $x \neq 0$ *жана* $\rho(x, a) < \delta$ *болгон чекиттери үчүн* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *барабарсыздыгы орун алса, анда А саны* $f(x)$ *функциясынын* $\{M\}$ *көптүгү боюнча а чекитиндеги предели деп аталат.*

Бул 2-, 3-аныктамалардын өз ара эквиваленттүүлүгү бир аргументтүү функция учурундагы сыяктуу эле далилденет. Эгерде $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын предели $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ чекитинде аныкталса, анда ал ошол чекитке ар кандай багыт жана ийри сызык боюнча да аныкталып, анын бардыгы барабар болот. Мисалы, $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 : (x_1^4 + x_2^2)$ функциясынын $0(0, 0)$ чекитиндеги чегин карап көрөлү. Эгерде, бул функциянын чегин $x_1 = \lambda t$, $x_2 = \eta t$ түз сызыктарынын чекиттеринин көптүгү боюнча эсептесек

$\lim\limits_{t\to 0} f(\lambda t,\ \eta t) = \lim\limits_{t\to 0} \lambda^2 \cdot \eta t : (\lambda^4 t^2 + \eta^2) = 0$, ал эми $x_2 = x_1^2$ ийри сызыгы боюнча

$$\lim_{x_1\to 0} f(x_1,\ x_1^2) = \frac{1}{2}.$$

Демек, эки көптүк боюнча эсептелген пределдер барабар болбогондуктан $f(x_1,\ x_2)$ функциясынын $0(0,\ 0)$ чекитиндеги предели болбойт.

Көп аргументтүү $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясынын пределинин башка түрүнө, б.а.

$$\lim_{x_1\to a_1} \lim_{x_2\to a_1} \ldots \lim_{x_n\to a_n} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \tag{20}$$

кайталанма пределдерине токтололу.

Бул (20) да чекке өтүүнүн ирээти башкача болушу да мүмкүн. Жөнөкөй болсун үчүн эки аргументтүү функциянын кайталанма пределин карайлы. Мейли $u = f(x_1,\ x_2)$ функциясы $\{x_1,\ x_2 \in R_2 : |x_1 - a_1| < 2h,\ |x_2 - a_2| < 2h\}$ квадратында аныкталып, $a = (a_1,\ a_2)$ чекитинде A санына барабар пределине ээ болсун дейлик.

1-теорема. *Эгерде x_1 дин $]a_1 - h,\ a_1 + h[$ интервалындагы ар кандай белгилүү маанилери үчүн $\varphi(x_1) = \lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,\ x_2)$ предели болсо жана ошондой эле $x_2 \in]a_2 - h,\ a_2 + h[$ үчүн $\psi(x_2) = \lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,\ x_2)$ болсо, анда кайталанма пределдери болот жана алар A га барабар:*

$$A = \lim_{x_1\to a_1} \lim_{x_2\to a_2} f(x_1,\ x_2) = \lim_{x_2\to a_2} \lim_{x_1\to a_1} f(x_1,\ x_2). \tag{21}$$

○ $u = f(x_1,\ x_2)$ функциясы $a = (a_1,\ a_2)$ чекитинде A га барабар болгон пределине ээ болгондуктан, ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta > 0$ саны табылып, $|x_1 - a_1| < \delta$ жана $|x_2 - a_2| < \delta$ болсо эле $|f(x_1,\ x_2) - A| < \varepsilon$ болот. Демек, a чекитинин квадраттык аймагында $f(x_1,\ x_2)$ функциясынын маанилери менен A санынын айырмасынын абсолюттук чоңдугу ε дон кичине. Анда $|x_1 - a_1| < \delta$ жана $|x_2 - a_2| < \delta$ болгондо, $\varphi(x_1)$ жана $\psi(x_2)$ чектери менен A санынын айырмасынын абсолюттук чоңдугу ε дон кичине. Ошондуктан $\varphi(x_1)$ жана $\psi(x_2)$ функцияларынын чектери тийиштүү a_1 жана a_2 чекиттеринде болуп, A санына барабар болот, б.а. (21) орун алат. ●

Кайталанма пределдердин жардамы менен Дирихленин функциясын аналитикалык жол менен бере алабыз.

$$D(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n! x = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } x - \text{рационалдык сан,} \\ 0, & \text{эгерде } x - \text{иррационалдык сан.} \end{cases}$$

Чындыгында, эгерде $x = \frac{p}{q}$, p, q — бүтүн сандар жана $q > 0$ болсо, анда $n \geq q$ болгондо $\cos 2\pi n! x = 1$. Демек, $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n! x = 1$. Ошентип, x — рационалдык сан болгондо $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} \cos^m 2\pi n! x = 1$. Эгерде x — иррационалдык сан болсо, анда ар кандай n үчүн $|\cos 2\pi n! x| < 1$ барабарсыздык орун алат, ошондуктан $\lim\limits_{m\to\infty} \cos^m 2\pi n! x = 0$ жана $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} \cos^m 2\pi n! x = 0$, $x \in R$.

3. Көп аргументтүү функциянын үзгүлтүксүздүгү.

R_n мейкиндигинин $\{M\}$ көптүгүндө аныкталган $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көп аргументтүү функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн Гейне төмөнкүчө аныктаган.

4-аныктама. *Эгерде $\{M\}$ көптүгүнүн $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чекитине жыйналуучу ар кандай $\{x^m\} = \{x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m\}$ удаалаштыгына туура келүүчү функциянын маанилеринин $\{f(x^m)\} = \{f(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)\}$ удаалаштыгы $f(a) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ маанисине жыйналса, анда $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чекитинде үзгүлтүксүз, б.а. төмөнкү барабардык орун алат:*

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=f(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n). \tag{22}$$

Функциянын үзгүлтүксүздүгүн Коши төмөнкүчө аныктаган.

5-аныктама. *Эгерде ар кандай $\varepsilon>0$ санына $\delta>0$ саны табылып $\{M\}$ көптүгүнүн ар кандай $x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ чекити үчүн*

$$\rho(x,a)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<\delta$$

болгондо, $|f(x)-f(a)|=|f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)-f(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)|<\varepsilon$ болсо, $u=f(x)=f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ функциясы $a=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Көп аргументтүү функциянын үзгүлтүксүздүгүн айрым бир аргументи боюнча да берүүгө болот. Ал үчүн жекече өсүндү түшүнүгүн кийирели.

6-аныктама. *$u=f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ функциясынын x_i аргументи боюнча жекече өсүндүсү деп, төмөнкү айырманы айтабыз:*

$$\Delta_{x_i}u=f(x_1,\ \dots,\ x_i+\Delta x_i,\ \dots,\ x_n)-f(x_1,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_n)\quad i=\overline{1,n} \tag{23}$$

Анда $u=f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ функциясның бир аргументи боюнча үзгүлтүксүздүгү мындайча аныкталат.

7-аныктама. *Эгерде $u=f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ функциясынын x_i аргументи боюнча жекече өсүндүсү чексиз кичине чоңдук болсо, б.а. $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\Delta_{x_i}u=0$, анда ал функция x_i аргументи боюнча үзгүлтүксүз.*

Көп аргументтүү функциянын ар бир аргументи боюнча өз алдынча үзгүлтүксүздүгүнөн ал функциянын үзгүлтүксүздүгү келип чыкпайт. М и с а л ы,

$$f(x_1,\ x_2)=\begin{cases} x_1x_2:(x_1^2+x_2^2), \text{ эгерде } x_1^2+x_2^2\neq 0,\\ 0, \text{ эгерде } x_1=x_2=0\end{cases}$$

функциясы 0(0, 0) чекитинде, ар бир аргументи боюнча өз алдынча үзгүлтүксүз, ал эми бардыгы боюнча үзгүлтүксүз эмес, себеби 0(0, 0) чекитинде $f(x_1,\ x_2)$ функциясынын предели болбойт.

Көп аргументтүү татаал функцияны аныктап, анын үзгүлтүксүздүгүн карайлы.

8-аныктама. *Эгерде R_n мейкиндигинин $\{M\}$ көптүгүндөгү $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын аргументтери R_m мейкиндигинин $\{N\}$ көптүгүндө аныкталган функциялар болушса, б.а.*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

анда $u=f[\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_n)]$ функциясы $\{N\}\subset R_m$ көптүгүндө аныкталган татаал функция болот.

2-теорема. *Эгерде $x_1=\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m)$, ..., $x_n=\varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m)$ функциялары $c=(c_1, c_2, ..., c_m)\in\{N\}$ чекитинде жана $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $a=(a_1, a_2, ..., a_n)\in\{M\}$ чекитинде, мында $a_i=\varphi_i(c_1, c_2, ..., c_m)$, $i=1, 2, ..., n$ үзгүлтүксүз болушса, анда $u=f[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]$ татаал функциясы $c=(c_1, c_2, ..., c_n)$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.*

○ Теореманы далилдөө үчүн $c=(c_1, c_2, ..., c_m)$ чекитине жыйналуучу $\{t_1^\kappa, t_2^\kappa, ..., t_m^\kappa\}$, $\kappa=1, 2, ...$ удаалаштыгын карайлы. Бул удаалаштыгына $\{x_1^\kappa, x_2^\kappa, ..., x_n^n\}$, $\kappa=1, 2, ...$ удаалаштыгы туура келет, себеби $x_i^\kappa=\varphi_i(t_1^\kappa, t_2^\kappa, ..., t_m^\kappa)$, $i=1, 2, ..., n$, $\kappa=1, 2, ...$. Мындан, $\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1, t_2, ..., t_m)$ функцияларынын $c=(c_1, c_2, ..., c_m)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде тийиштүү болгон $\{x^\kappa\}=\{x_1^\kappa, x_2^\kappa, ..., x_n^\kappa\}$ удаалаштыгы $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ чекитине жыйналат. Дагы ошондой эле $f(x)=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде $\{f(x^\kappa)\}$

удаалаштыгы $f(a)$ санына жыйналат. Демек $\{f[\varphi_1(t^{\kappa}),\ \varphi_2(t^{\kappa}),\ \ldots,\ \varphi_n(t^{\kappa})]\}$ удаалаштыгы функциянын $f[\varphi_1(c),\ \varphi_2(c),\ \ldots,\ \varphi_n(c)]$ маанисине жыйналат. Мындан татаал $f[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)]$ функциясынын $c=(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү келип чыгат.

§ 4. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ФУНКЦИЯЛАРДЫН НЕГИЗГИ КАСИЕТТЕРИ

Үзгүлтүксүз көп аргументтүү функциялар деле бир аргументтүүлөр сыяктуу касиеттерге ээ. Ошондуктан ал касиеттерди кыскача эле карайлык.

1°. Үзгүлтүксүз функциялар менен болгон амалдар.

1-теорема. *Эгерде* $f(x)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *жана* $g(x)=g(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *функциялары* $\{M\}$ *көптүгүндө аныктался жана кандайдыр бир* $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\in\{M\}$ *чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ *жана* $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ *функциялары да a чекитинде үзгүлтүксүз болот.*

Бул теорема функциялардын пределдеринин теоремасы менен оңой эле далилденет.

2°. Үзгүлтүксүз функциянын белгисинин сакталышы.

2-теорема. *Эгерде* $f(x)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *функциясы* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\{R\}$ *чекитинде үзгүлтүксүз жана* $f(a)=f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\neq 0$ *болсо, анда* $f(x)$ *функциясынын маанисинин белгиси* $f(a)$ *нын белгисине дал келип,* $f(x)\neq 0$ *болгондой a чекитинин* δ *— аймагы табылат.*

○ Функциянын үзгүлтүксүздүгүнүн Кошинин аныктамасынан ар кандай $\varepsilon>0$ санына $\delta>0$ саны табылып, a чекитинин δ — аймагында $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$ экендиги келип чыгат. Эгерде мында $\varepsilon=|f(a)|/2$ болсо, анда $f(a)-\varepsilon$, $f(a)$, $f(a)+\varepsilon$ сандары бирдей белгиде болот. Ошондуктан $f(x)$ тин δ аймагындагы белгиси $f(a)$ нын белгиси менен бирдей болот. ●

3°. **Үзгүлтүксүз функциянын арадагы бардык маанини кабыл алышы.**

3-теорема. *Мейли $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы бир байланыштагы $\{M\} \subset R_n$ көптүгүндө үзгүлтүксүз болуп, ошол көптүктүн $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ жана $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ чекиттеринде $A = f(a)$ жана $B = f(b)$ маанилерине ээ болсун дейлик. Анда A жана B сандарынын арасында жаткан ар кандай C саны, б.а. $A < C < B$ үчүн толугу менен $\{M\}$ көптүгүндө жаткан жана A менен B чекиттерин бириктирген L ийри сызыгынан $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ чекити табылып $f(c) = f(c_1, c_2, \dots, c_n) = C$ болот.*

○ Толугу менен $\{M\}$ көптүгүндө жаткан L ийри сызыгынын теңдемеси $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$ $\alpha \le t \le \beta$ болсун (§ 2, 1-п. 9-аныктама). Анда $[\alpha, \beta]$ сегментинде $u = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)] = F(t)$ татаал функциясы аныкталып, анын мааниси $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$ фнкциясынын L ийри сызыгындагы мааниси менен дал келет. Бул t аргументинен коз каранды болгон татаал функция 3-параграфтын 2-теоремасынын негизинде $[\alpha, \beta]$ сегментинде үзгүлтүксүз жана бир аргументтүү үзгүлтүксүз функциянын касиетинин негизинде $[\alpha, \beta]$ сегментиндеги кандайдыр бир ξ чекитинде $F(\xi) = C$ болот. Ошондуктан L ийри сызыгынан $(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)) = C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ чекити табылып, $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = C$ орун алат. ●

4°. **Үзгүлтүксүз функциянын туюк областтагы чектелүүсү.**

4-теорема. (Вейерштрасстын биринчи теоремасы). *Эгерде $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы туюк чектелген $\{M\}$ көптүгүндө үзгүлтүксүз болсо, анда ал ошол $\{M\}$ көптүгүндө чектелген функция болот.*

○ Теореманы карама-каршы ыкмасы менен далилдейли. Ал үчүн $u = f(x)$ функциясы толук чектелген $\{M\}$ көптүгүндо чектелбеген функция болсун деп болжолдойлу, б.а.

$\{M\}$ көптүгүндө жаткан $\{x^{\kappa}\}$ удаалаштыгына туура келүүчү функциянын маанилеринин удаалаштыгы үчүн $|f(x^{\kappa})| > \kappa$ орун алат. Анда Больцано-Вейерштрасстын теоремасынын негизинде $\{x^{\kappa}\}$ удаалаштыгынан чекитине жыйналуучу $\{x^{\kappa m}\}$ камтылган удаалаштыгын алууга болот. Жогорудагы болжолдообуз боюнча ага тийиштүү болгон функциянын маанилеринин $\{f(x^{\kappa m})\}$ удаалаштыгы жыйналбоочу удаалаштык. Бирок теореманын шарты боюнча $f(x)$ функциябыз үзгүлтүксүз болгондуктан, $\{f(x^{\kappa m})\}$ удаалаштыгы жыйналуучу болот. Бул алынган карама-каршылык болжолдообуздун туура эмес экендигин көргөзөт жана ошону менен теорема далилденет. ●

Ошентип, компакттагы аныкталган үзгүлтүксүз функция чектелген болорун көрдүк.

5°. Үзгүлтүксүз функциянын туюк областта өзүнүн дал (накта) чектерине жетишүүсү.

1-аныктама. *Эгерде $\overline{u}(\underline{u})$ саны төмөнкүдөй эки шартты канаатандырса:*

1) *$\{M\}$ көптүгүнүн бардык $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ чекиттери үчүн $|f(x)| = |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \overline{u}(|f(x)| \geq \underline{u})$.*

2) *Ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\{M\}$ көптүгүнөн жок дегенде бир $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ чекити табылып $f(a) > \overline{u} - \varepsilon$ $(f(a) < \underline{u} + \varepsilon)$ болсо, анда ал санды $f(x)$ функциясынын жогорку (төмөнкү) дал (накта) чеги дейбиз.*

5-теорема. (Вейерштрасстын экинчи теоремасы). *Эгерде $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы туюк чектелген $\{M\}$ көптүгүндө үзгүлтүксүз болсо, анда ал өзүнүн дал (накта) жогорку жана төмөнкү чектерине жетише алат.*

Бул теорема бир аргументтүү функция учурундагыдай эле далилденет (өз алдынарча далилдегиле, III гл., § 2деги 4тү кара).

6°. Көп аргументтүү функциянын бир калыптагы үзгүлтүксүздүгү.

2-аныктама. *Эгерде ар кандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, R_n мейкиндигиндеги $\{M\}$ көптүгүнүн, $\rho(x', x'') < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган, ар кандай x' жана x'' эки чекити үчүн $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алса, анда $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $\{M\}$ көптүгүндө бир калыптагы үзгүлтүксүз функция деп аталат.*

Бир калыптагы үзгүлтүксүздүк тууралуу томонкү теорема орун алат.

6-теорема. (Кантордун теоремасы). *Туюк чектелген $\{M\}$ көптүгүндөгү үзгүлтүксүз функция ошол көптүктө бир калыпта үзгүлтүксүз болот.*

○ Туюк чектелген $\{M\}$ көптүгүндөгү үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясы бир калыпта үзгүлтүксүз эмес деп болжолдойлу, б.а. ар кандай $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $\{M\}$ көптүгүнүн $\rho(x', x'') < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган ар кандай x' жана x'' эки чекити үчүн карама-каршы $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алсын дейли. Тактап айтканда чеги $\lim\limits_{\kappa \to \infty} \delta_\kappa = 0$ болгон, мисалы $\{\delta_\kappa\} = \left\{\frac{1}{\kappa}\right\}$ удаалаштыгын алсак жана $\rho(x'_\kappa, x''_\kappa) < \frac{1}{\kappa}$, $\{x'_\kappa\}$, $\{x''_\kappa\} \subset \{M\}$ болсо, анда

$$|f(x'_\kappa) - f(x''_\kappa)| \geq \varepsilon, \quad \kappa = 1, 2, \dots \tag{25}$$

Ал эми $\{M\}$ көптүгү компакт болгондуктан $\{x'_\kappa\}$ удаалаштыгынан чеги $\lim\limits_{m \to \infty} x'_{\kappa_m} = \xi \in \{M\}$ болгон жыйналуучу камтылган $\{x'_{\kappa_m}\}$ удаалаштыгын бөлүп алууга болот. Эгерде $\{x''_{\kappa_m}\}$ камтылган удаалаштыгын алсак, анда анын предели да $\lim\limits_{m \to \infty} x''_{\kappa_m} = \xi$ болот. Чындыгында, метриканын аксиомасынын негизинде

$$\rho(x''_{\kappa_m}, \xi) \leq \rho(x''_{\kappa_m}, x'_{\kappa_m}) + \rho(x'_{\kappa_m}, \xi) < \rho(x'_{\kappa_m}, \xi) + \frac{1}{\kappa_m}.$$

мында $n \to \infty$ да, $\rho(x'_{\kappa_m}, \xi) \to 0$ жана $\frac{1}{\kappa_m} \to 0$. Ошол себептүү $\rho(x''_{\kappa_m}, \xi) \to 0$, демек $x'_{\kappa_m} \to \xi$. Ал эми $f(x)$ функциясы $\{M\} \ni \xi$ чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан $m \to \infty$ да $f(x'_{\kappa_m}) \to f(\xi)$ жана $f(x''_{\kappa_m}) \to f(\xi)$, анда

$$f(x''_{\kappa_m}) - f(x'_{\kappa_m}) \to 0. \qquad (26)$$

Бирок, биздин болжолдообуз боюнча $\left|f(x''_{\kappa_m}) - f(x'_{\kappa_m})\right| \geqslant \varepsilon$, б.а. (25) жана (26) өз ара карама-каршы. Бул карама-каршылык теореманы далилдейт. ●

§ 5. КӨП АРГУМЕНТТҮҮ ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУЛАРЫ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

1. Жекече туундулар.

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын аныкталган областынын $x^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ички чекитинде функциянын $\Delta_{x_i} u$ жекече өсүндүсүнүн (§ 3. 3-п. 6-аныктаманы кара) ошол аргументтин Δx_i өсүндүсүнө болгон катышын карайлы:

$$\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}. \qquad (27)$$

1-аныктама. *Эгерде $\Delta x_i \to 0$ да (27) катышынын предели болсо, анда аны $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитиндеги x_i аргументи боюнча жекече туундусу деп атайбыз жана аны төмөнкү белгилердин $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, u'_{x_i}, f'_{x_i}, бири менен белгилейбиз, б.а.*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i}. \qquad (28)$$

Көп аргументтүү $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын x_i аргументи боюнча жекече туундусу калган аргументтери турактуу болгон, бир x_i аргументтүү функциянын туундусу сыяктуу болот. Ошондуктан жекече туундуну табуу, бир аргументтүү функциянын туундусун табуу эрежелери аркылуу жүзгүзүлөт.

Мисалы. 1) $u = sin\left(x^2 + y^3\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xcos\left(x^2 + y^3\right)$, $\frac{\partial u}{\partial y} =$

$= 3y^2 cos(x^2 + y^3)$.

2) $u = z^3 e^{x^2 - y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz^3 e^{x^3 y^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2yz^3 e^{x^2 - y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 e^{x^2 y^2}$.

1-эскертүү. Берилген чекитте функциянын жекече туундуларга ээ болушунан анын үзгүлтүксүздүгү келип чыкпайт.

Мисалы, биз мурда (§ 3, 3-п.) караган

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2/\left(x^2{}_1 + x^2{}_2\right), \text{ эгерде } x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, \text{ эгерде } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

функциясы 0(0, 0) чекитинде x_1 жана x_2 аргументтери боюнча жекече туундуларга ээ болот, анткени $f(x_1, 0) = 0$ жана $f(0, x_2) = 0$ демек $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right/_{(0,\,0)} = 0$ жана $\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right/_{(0,\,0)} = 0$, бирок $f(x_1, x_2)$ функциябыз 0(0,0) чекитинде үзгүлтүктүү.

2. Көп аргументтүү функциянын дифференцирленүүсү.

Адегенде көп аргументтүү функциянын толук өсүндүсүн аныктайлы.

2-аныктама. *$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясын $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитиндеги $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ аргументтеринин өсүндүлөрүнө туура келүүчү толук өсүндү деп төмөнкү айырманы айтабыз:*

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (29)$$

3-аныктама. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитиндеги толук өсүндүсү төмөнкү түрдө туюнтулса,*

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \\ +\alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n, \qquad (30)$$

мындагы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ар кандай чыныгы сандары* x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$ *ден гана көз каранды, ал эми* $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, $\ldots$, $\Delta x_n \to 0$ *да* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *чексиз кичине чоңдуктар, анда ал функцияны ошол чекитте дифференцирленүүчү функция дейбиз.*

Бул (30) туюнтманы көп аргументтүү функциянын дифренецирленүүсүнүн шарты дешет жана аны башкача түрдө

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + O(\rho) \qquad (31)$$

жазууга болот. Мындагы $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, $\ldots$, $\Delta x_n \to 0$ да чексиз кичине функция жана

$$O(\rho) = \frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho^2}{\rho} = \frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}{\rho} = \left[\frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_1}{\rho}\right]\Delta x_1 + \\ + \left[\frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_2}{\rho}\right]\Delta x_2 + \ldots + \left[\frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_n}{\rho}\right]\Delta x_n.$$

Эгерде, $\frac{O(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_i}{\rho} = \alpha_i$, $\alpha_i = 1, 2, \ldots, n$ десек, анда α_i нин $\Delta x_i \to 0$ да чексиз кичине функция болору көрүнүп турат.

Ошентип, көп аргументтүү функциянын дифференцирленүү шарты (30) жана (31) түрүндө да жазылат.

Эгерде $A_1, A_2, \ldots, A_n$ сандарынын жок дегенде бирөө нөлгө барабар болбосо, анда $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$ суммасы дифференцирленүүчү функциянын толук өсүндүсүнүн аргументтеринин өсүндүлөрүнө карата башкы сызыктуу бөлүгү болот.

1-теорема. *Эгерде* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функциясы* $x_0(x_1^0$, $x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда ал чекитте бардык аргументтери боюнча жекече туундулар* *жашайт жана $\partial u(x_0)/\partial x_i = A_i$, мындагы A_i сандары дифференцирленүүнүн шарты* (30) *же* (31) *ден аныкталат.*

○ Функциянын $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде дифференцирленүүчү (4) шартынан $\Delta_{x_i} u$ жекече өсүндүсү үчүн $\Delta_{x_i} u = A_i + \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$ барабардыгын алабыз. Ал эми мындан төмөнкүгө ээ болобуз: $\Delta_{x_i} u/\Delta x_i = A_i + \alpha_i$.

Анда, $\Delta x_i \to 0$ да $\alpha_i \to 0$ бизге белгилүү, ошондуктан

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta x_i u}{\Delta x_i} = A_i, \ i = 1, 2, ..., n. \quad ●$$

Натыйжа. 1) *функциянын дифференцирленүүсүнүн* (31) *шартын төмөнкүчө жазууга болот:*

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ ... \ + \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_n} \Delta x_n + O(\rho).$$

2) *Эгерде* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *функциясы* $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын толук өсүндүсүнүн* (30) *же* (31) *түрүндөгү туюндурулушу бир гана түрдүү.*

2-теорема. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда ал ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.*

Бул теореманын далилдөөсү дифференцирленүүчүлүктүн (30) же (31) шартынан келип чыгат, б.а. $|\Delta x_1| \leq \rho$, $|\Delta x_2| \leq \rho$, ..., $|\Delta x_n| \leq \rho$, болгондуктан, $\rho \to 0$ да $\Delta u \to 0$ (§ 3, 3-п, 5-аныктама). Бул $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде үзгүлтүксүз экендигин билгизет.

3-теорема. (**Дифференцирленүүнүн жетиштүү шарты**). *Эгерде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинин аймагында бардык аргументтери боюнча жекече туундуга ээ болуп, жана алар ошол чекитте үзгүлтүксүз*

16*

болушса, анда ал функция x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болот.

○ Функциянын $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитиндеги толук өсүндүсүн карайлы.

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) -$$
$$- f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)]. \qquad (32)$$

Мындагы

$$[f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) -$$
$$- f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)]$$

туюнтма функциянын x_i аргументи боюнча $\left[x_i^0, x_i^0 + \Delta x_i\right]$ сегментиндеги өсүндүсү болот. Функциябыз x_0 чекитинин аймагында бардык аргументтери боюнча жекече туундуга ээ болгондуктан (32) өсүндүсүнө Лагранждын формуласын колдонуп, төмөнкүнү алабыз.

$$[f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, \ldots,$$
$$\ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)] = f'_{x_i}(x_i^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 +$$
$$+ \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)\Delta x_i, \ 0 < \theta_i < 1.$$

Ал эми бардык $f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан төмөнкүгө келебиз:

$$f'_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^0 + \Delta x_{i+1}, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)\Delta x_i =$$
$$= f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)\Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Мындагы α_i чексиз кичине чоңдуктар, б.а. $\alpha_i \to 0$, эгерде $\Delta x_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ошентип, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ чекитиндеги Δu толук өсүндүсүн төмөнкүчө туюнтабыз:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left[f'_{x_i}\left(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0\right)\Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i\right].$$

Демек, 1-теореманын негизинде $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциябыз $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болот. ●

Натыйжа. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинин аймагында бардык аргументтери боюнча жекече туундуларга ээ болуп, алар x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушса, анда ал функциябыз ошол чекитте үзгүлтүксүз болот.*

4-аныктама. *Кандайдыр бир $x_0 = x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде бардык аргументтери боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болгон $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясын ошол чекитте үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция деп атайбыз.*

5-аныктама. *Дифференцирленүүчү $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын $x = x(x_1, x_2, ..., x_n)$ чекитиндеги du дифференциалы деп анын толук өсүндүсүнүн башкы сызыктуу бөлүгүн айтабыз, б.а.*

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n. \tag{33}$$

Мындан, § 5теги 1-натыйжанын негизинде төмөнкүгө ээ болобуз:

$$du = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n =$$

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n. \tag{34}$$

Демек, көп аргументтү функциянын дифференциалы du (34) формуласы менен табылып, $r \to 0$ да $\Delta u = du + O(r)$ болоору көрүнүп турат.

Эгерде $n = 2$ жана 3 болсо, анда $u = f(x_1, x_2)$ жана $u = f(x_1, x_2, x_3)$ функциялары R_2 тегиздигинин жана R_3 мейкиндигинин областтарында каралып, дифференциалы (34) формуласынын тийиштүү $n = 2$ жана 3 учуру болот.

Мисалы, 1) $u = arctg\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ **болсо, анда**

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = \frac{2x_1 dx_1}{1+\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} + \frac{2x_2 dx_2}{1+\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}.$$

2) $u = e^{x_1 x_2 x_3}$, $du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 =$

$$= x_2 x_3 e^{x_1 x_2 x_3} dx_1 + x_1 x_3 e^{x_1 x_2 x_3} dx_2 + x_1 x_2 e^{x_1 x_2 x_3} dx_3.$$

3. Көп аргументтүү татаал функциянын дифференциалы.

Эми биз көп аргументтүү татаал функциянын дифференциалына токтололу. Татаал функциясы берилсин:

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \{M\} \subset R_n$, **мындагы**

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m), \ (t_1, t_2, ..., t_m) \in \{N\} \subset R_m. \end{cases} \tag{35}$$

Анда берилген $u = f[\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., \varphi_n(t_1, t_2, ..., t_m)]$ **татаал функциянын** $t_1, t_2, ..., t_m$ **аргументтери боюнча жекече туундулары төмөнкү формулалар менен табылат:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u}{\partial t_n} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_n} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_n}. \end{aligned} \tag{36}$$

4-теорема. *Эгерде* (35) *функциялары* $C(c_1, c_2, ..., c_m)$ *чекитинде, ал эми* $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ *функциясы тийиштүү*

$x_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ *(мында* $x_i^0=\varphi_i\left(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m\right),\ i=1,\ 2$ *) чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда* $u=f[\varphi_1(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m),$ $\varphi_2(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m),\ \ldots,\ \varphi_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)]$ *татаал функциясы* $C(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болот.*

○ $C(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ **чекитинде** $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m$ **аргументтерине** $\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \ldots,\ \Delta t_m$ **өсүндүлөрүн берсек, анда буларга (35) функцияларынын** $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ **өсүндүлөрү тийиштүү болот. Ал эми** $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ **өсүндүлөрүнө өз кезегинде,** $u=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ **функциясынын** $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ **чекитиндеги** Δu **өсүндүсү туура келет. Теореманын шарты боюнча** $u=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ **дифференцирленүүчү болгондуктан анын** Δu **өсүндүсү төмөнкүчө туюнтулат:**

$$\Delta=\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_n}\Delta x_n+$$

$$+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ldots+\alpha_n\Delta x_n. \qquad (37)$$

Мындагы $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ **чексиз кичине чоңдуктар, эгерде** $\Delta x_1\to 0,\ \Delta x_2\to 0,\ \ldots,\ \Delta x_n\to 0$. **Ал эми** $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ **өз кезегинде** $C\left(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n\right)$ **чекитиндеги (35) дифференцирленүүчү функциялардын аргументтеринин** $\Delta t_1,\ \Delta t_2,\ \ldots,\ \Delta t_n$ **өсүндүлөрүнө туура келүүчү өсүндүлөрү болгондуктан, аларды төмөнкүчө жаза алабыз:**

$$\Delta x_i=\frac{\partial x_i(c)}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_i(c)}{\partial t_2}\Delta t_2+\ldots+\frac{\partial x_i(c)}{\partial t_n}\Delta t_n+O(\mathrm{r}),\ i=\overline{1,\ n}, \quad (38)$$

мындагы $\mathrm{r}=\sqrt{(\Delta t_1)^2+(\Delta t_2)^2+\ldots+(\Delta t_n)^2}$.

Эгерде (38) туюнтмасындагы $\Delta x_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ **(37) формуласына койсок, төмөнкүгө ээ болобуз:**

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i(c)}{\partial t_j}\Delta t_j+O(\rho)\right]+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i(c)}{\partial t_j}\right)\Delta t_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}O(\rho)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}A_j\Delta t_j+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}O(\rho)+\alpha_i\Delta x_i\right]. \qquad (39)$$

Алынган формуладагы акыркы $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}O(\rho)+\alpha_i\Delta x_i\right]$ мүчөсү $\rho\to 0$ да чексиз кичине чоңдук, себеби $\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}$, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$ турактуу, ρ дон көз каранды эмес чоңдуктар жана $\Delta t_j\to 0$, $\left(j=\overline{1,\ m}\right)$ да $\alpha_i\to 0$, $i=\overline{1,\ n}$. Ошентип берилген татаал $u=f\left[\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_n\right]$ функциясынын толук Δu өсүндүсүн (39) түрүндө туюнттук, б.а. берилген татаал функция $t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m$ аргументтери боюнча дифференцирленүүчү экендигине ынандык. ●

Биз ушул параграфтагы (34) формула аркылуу көп аргументтүү функциянын дифферециалын аныктаганбыз. Эми көп аргументтүү татаал функциянын биринчи дифференциалын деле (34) түрүндөгү формула менен аныкталарына токтололу. Татаал функциянын биринчи дифференциалынын формасынын сакталышы, анын инварианттуулук касиетке ээ экендигин билгизет. Чындыгында, $u=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)=$ $=f\left[\varphi_1\left(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m\right),\ \varphi_2\left(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m\right),\ ...,\ \varphi_n\left(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m\right)\right]$ татаал функциясынын биринчи дифференциалын (34) жана (36) формулаларынын жардамы менен тапсак төмөнкүнү алабыз:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_n}dt_n\right)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_n}dt_n\right)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n}dt_n\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\right)dt_1+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}\right)dt_2+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m}\right)dt_m=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t_m}dt_m.$$

Мындан, көп аргументтүү функциянын $x_1, x_2, \ldots, x_n$ жана $t_1, t_2, \ldots, t_m$ аргументтери боюнча табылган биринчи дифференциалынын формалары бирдей экендигин көрөбүз. Биринчи дифференциалдык формасынын бул инварианттуулук касиети көп аргументтү функцияларды дифференцирлөө эрежелерин аныктоого мүмкүндүк берет. Эгерде u жана v дифференцирленүүчү көп аргументтүү функциялары болсо, анда

$$d(c\cdot u)=c\cdot du,\ c-const,$$
$$d(u+v)=du+dv,$$
$$d(u\cdot v)=vdu+udv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Мисалы. 1) $u=e^{x_1^2+x_2^2},\ x_1=cost,\ x_2=sint$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx=2x_1e^{x_1^2+x_2^2}dx_1+2x_2e^{x_1^2+x_2^2}dx_2=$$
$$2e^{x_1^2+x_2^2}(-cost\cdot sint+sint\cdot cost)dt=0.$$

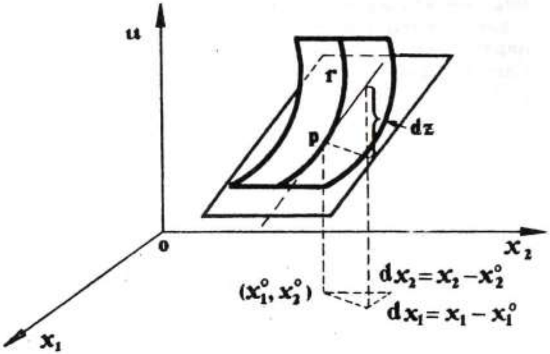
2) $f(x_1,\ x_2)=(x_1+x_2)^2 e^{x_1-x_2},\ u=(x_1+x_2)^2,\ \upsilon=e^{x_1-x_2}$

$$du=du\cdot\upsilon+ud\upsilon=(x_1+x_2)e^{x_1-x_2}\left[(2+x_1+x_2)dx_1+(2-x_1-x_2)dx_2\right].$$

4. Дифференциалдын геометриялык мааниси.

Көп аргументтүү функциянын дифференциалынын геометриялык маанисине эки аргументтүү $u=f(x_1,\ x_2)$ функция үчүн карайлык. Ал үчүн функцияны $\{M_2\}\subset R_2$ көптүгүндө дифференцирленүүчү болуп, анын графиги $\{M_3\}=$ $=\left\{(x_1,\ x_2,\ u)/u=f(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_2)\in\{M_2\}\right\}\subset R_3$ көптүгүн түзсүн дейли. Ушул $\{M_3\}$ көптүгүндө жаткан (40-чийме) $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$, б.а. $x_3^0=f\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ чекити аркылуу өтүүчү кандайдыр бир жылма ийри сызыгын карайлы:

$$\Gamma=\left\{x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ u=u(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\right\},$$



40-чийме

мында, $u(t)=f\left(x_1(t),\ x_2(t)\right)$,

$$\left(x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ u(t_0)\right)=\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right), t_0\in(\alpha,\ \beta).$$

Эгерде (40) татаал функциясын t_0 чекитинде дифференцирлеп, биринчи дифференциалдын формасынын инварианттуулугун эске алсак, төмөнкүгө келебиз:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)dx_2. \qquad (41)$$

Мындагы $d\tau=(dx_1,\ dx_2,\ du)$ вектору $p\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекити аркылуу $Г$ ийри сызыгына жүргүзүлгөн жанымынын вектору болот. Ал эми

$$\vec{n}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right),\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right),\ 1\right) \qquad (42)$$

вектору (41) шартынын негизинде $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекити аркылуу $Г$ ийри сызыгына жүргүзүлгөн жанымага, б.а. $d\tau$ векторуна ортогоналдуу экендиги көрүнүп турат. Мындагы $Г$ ийри сызыгы $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекити аркылуу өтүүчү жана $\{M\}$ көптүгүндө жатуучу ар кандай ийри сызык. Ошондуктан $\vec{n}$ вектору $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекити аркылуу өткөн жана $u=f(x_1,\ x_2)$ функциясынын графиги болгон бетте жаткан ар кандай ийри сызыкка ортогоналдуу болот да аны *нормалдык вектор* деп аташат. Ал эми $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекити аркылуу өтүп жана нормалдык $\vec{n}$ векторуна ортогоналдуу болгон тегиздикти $u=f(x_1,\ x_2)$ функциясынын графигинин жаныма тегиздиги дейбиз. Анын теңдемеси төмөнкүчө:

$$U-f\left(x_1^0,\ x_2^0\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\left(x_2-x_2^0\right). \qquad (43)$$

Ал эми $\vec{n}$ нормалдык векторуна параллель болуп $p\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ чекити аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси төмөнкүчө:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{-f_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)} + \frac{x_2 - x_2^0}{-f_{x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)} = U - f\left(x_1^0,\ x_2^0\right).$$

Бул түз сызыкты $u = f(x_1,\ x_2)$ бетинин $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right)$ чекитиндеги нормалы дейбиз.

Эми жаныма тегиздиктин $P\left(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0\right) \in \left\{M_3\right\}$ чекитиндеги аппликатасын (43)төн тапсак $U - f(x_1^0,\ x_2^0) = 0 \Rightarrow U = f(x_1^0,\ x_2^0) = x_3$ болот. Анда (17)ден $\left(X_1,\ X_2\right) = (x_1,\ x_2) \in \{M_2\}$ болгондо төмөнкүгө келебиз:

$$U - x_3^0 = \frac{\partial f\left(x_1^0,\ x_2^0\right)}{\partial x_1}\left(x_1 - x^0\right) + \frac{\partial f\left(x_1^0,\ x_2^0\right)}{\partial x_2}\left(x_2 - x_2^0\right) = df\left(x_1^0,\ x_2^0\right).$$

Ошентип, мындан $df\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ жаныма тегиздиктин аппликатасынын өсүндүсүнө барабар (40-чийме) экендиги көрүнүп турат.

5. Багыт боюнча туунду. Градиент.

Көп аргументтүү $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясы R_n мейкиндигиндеги $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ чекитинин δ — аймагында $U(x_0,\ \delta)$ аныкталсын дейлик. Ушул аймактан эркибизче бир $x(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ чекитин алып, x_0 жана x чекиттери аркылуу түз сызык жүргүзсөк, анда анын параметрдик теңдемеси төмөнкүчө болот:

$$x_i = x_i^0 + s\cos\alpha_i,\ i = \overline{1,n},\ -\infty < s < \infty. \tag{44}$$

Мындагы $\cos\alpha_i$ лер, $l = \overrightarrow{x_0 x} = \left\{x_1 - x_1^0,\ x_2 - x_2^0,\ \ldots,\ x_n - x_n^0\right\}$ векторунун багыттоочу косинустары, б.а. $\vec{e}$ бирдик векторунун координаталары

$$\vec{e} = \{\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots,\ \cos\alpha_n\}. \tag{45}$$

Мында $\cos\alpha_1 = \dfrac{x_1 - x_1^0}{\rho}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{x_2 - x_2^0}{\rho}$, ..., $\cos\alpha_n = \dfrac{x_2 - x_2^0}{\rho}$

жана $\rho = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2}$.

6-аныктама. *Эгерде* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x_0 x}$ *чеги аныкталса, аны* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функциясынын* $x_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *чекитиндеги* $\vec{l} = \overrightarrow{x_0 x}$ *векторунун багыты боюнча алынган туундусу деп аталып,* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial l}$ *символу менен белгиленет.*

Эгерде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясын, алынган $x_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ жана $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түз сызыкта карасак, анда ал s тен гана көз каранды болгон татаал функция болот, б.а.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(x_1^0 + s\cos\alpha_1,\ x_2^0 + s\cos\alpha_2,\ \ldots,\ x_n^0 + s\cos\alpha_n\right).$$

Бул татаал функциянын s боюнча туундусу f функциясынын x_0 чекитиндеги $\vec{e}$ векторунун багыты боюнча туундусу болот,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x_0 x} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f\left(x_1^0 + s\cos\alpha_1,\ x_2^0 + s\cos\alpha_2,\ \ldots,\ x_n^0 + s\cos\alpha_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)}{s} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial s}\Big/_{s=0} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds} + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{ds}.$$

Мындагы $\dfrac{dx_i}{ds} = \cos\alpha_i,\ i = \overline{1,n}$ туундуларды (44) формуладан таап, биротоло төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\cos\alpha_n. \qquad (46)$$

Ошентип, төмөнкүдөй теореманы далилдедик.

5-теорема. *Эгерде* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функциясы* $x_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болсо,* *анда ал функция ошол чекитте ар кандай багыт боюнча туундуга ээ болот жана ал (46) формула менен аныкталат.*

7-аныктама. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциянын* $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ *чекитиндеги градиенти деп координаталары, жекече туундуларынын ошол чекиттеги маанилерине барабар болгон векторду айтабыз жана аны төмөнкүчө белгилеп жазабыз:*

$$grad f(x_0) = \left\{ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}; \ \dots, \ \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right\} = grad u(x_0). \qquad (47)$$

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүн эске алып, (45), (46) жана (47) формулалардан көп аргументтүү функциясынын багыт боюнча туундусун төмөнкүчө жазууга болот:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cos\alpha_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cos\alpha_n = (grad f, \vec{e}). \qquad (48)$$

М и с а л ы, $f(x, y, z) = xy^2 - z$ функциясынын $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ векторунун багыты боюнча туундусун табуу талап кылынса, анда (48) формулага ылайык $grad f$ жана $\vec{l}$ векторунун $\vec{e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ бирдик векторун таап, анан алардын скалярдык көбөйтүндүсүн эсептейбиз. Жогорудагы (47) формула боюнча

$$grad = \{y^2, \ 2xy, \ -1\} \ \text{жана} \ \vec{e} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

Ошентип, $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{2}{\sqrt{6}} y^2 + \frac{2}{\sqrt{6}} xy + \frac{1}{\sqrt{6}} = (grad f, \vec{e}).$

§ 6. ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛАР ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАР

1. Жогорку тартиптеги жекече туундулар.

1-аныктама. *Мейли* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясы* $\{M\}$ *областында аныкталып,* x_i *аргументи боюнча жекече* $\partial u / \partial x_i$ *туундуга ээ болсун жана* $\partial u / \partial x_i$ *өз кезегинде* $\{M\}$ *областында аныкталган көп аргументтүү функция болуп,*

x_k аргументи боюнча жекече туундуга ээ болсун десек, анда аны адегенде x_i анан x_k аргументтери боюнча алынган экинчи тартиптеги жекече туунду деп атап, төмөнкү символдордун бирөө менен белгилеп жазабыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i},\ u^{(2)}_{x_i x_k},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i},\ f''_{x_i x_k}.$$

Эгерде, мында $i \neq k$ болсо, анда аны экинчи тартиптеги аралаш жекече туунду деп атайбыз. Экинчи тартиптеги жекече туундулар сыяктуу эле үчүнчү, төртүнчү ж.б. тартиптеги жекече туундуларды аныктоого болот. Мейли $u=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $\{M\}$ көптүгүндө $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}$, аргументтери боюнча $(m-1)$ тартиптеги жекече туундуга ээ болсун, анда анын x_{i_m} аргументи боюнча алынган жекече туунду m-тартиптеги жекече туунду делип, төмөнкүчө жазылат:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_m} \partial x_{i_{m-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{i_{m-1}} \partial x_{i_{m-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right).$$

Эгерде, мындагы $i_1, i_2, ..., i_m$ индекстердин кээ бирлери өз ара барабар болушса, анда $\partial^m u / \partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}$, m-тартиптеги аралаш жекече туунду деп аталат.

Мисалы, $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$ функциясы берилсин. Анда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Бул мисалда аралаш жекече туундулар $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ жана $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ бири-бирине барабар. Жалпысынан алганда аралаш жекече туундулар бири-бири менен барабар болушпайт.

2-аныктама. *Эгерде* $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ *чекитинде* $u=$ $=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *функциясынын* $(m-1)$ *тартиптеги бардык жекече туундулары дифференцирленуучу функциялар болушса, анда* $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *ошол чекитте* m *жолу дифференцирленуучу функция деп аталат.*

Эми биз көп аргументтүү функциянын m жолу дифференцирленүүсүнүн жетиштүү шартын далилдөөсүз эле келтирели.

1-теорема. $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *функциясынын* $x_0(x_1^0,$ $x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ *чекитинде* m *жолу дифференцирленуусу учун анын бардык* $(m-1)$ *тартиптеги жекече туундулары ошол чекитте узгултуксуз болушу жетиштуу болот.*

Бул теорема жогорудагы 2-аныктама жана 5-параграфтагы 3-теореманын негизинде далилденет.

Аралаш жекече туундулардын барабардыгы тууралуу теореманы эки аргументтүү функция үчүн далилдейли.

2-теорема. *Эгерде* $u=f(x_1,\ x_2)$ *функциясы* $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ *чекитинде эки жолу дифференцирленуучу болсо, анда* $f''_{x_1x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ *жана* $f''_{x_2x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ *барабар.*

○ $u=f(x_1,\ x_2)$ функциябыз $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ чекитинде эки жолу дифференцирленүүчү болгондуктан, биринчи тартиптеги жекече туундулар $f'_{x_1}\left(x_1,\ x_2\right)$ жана $f'_{x_2}\left(x_1,\ x_2\right)$ ошол чекиттин аймагында, дифференцирленүүчү функциялар болот. Төмөнкү туюнтманы карап көрөлү:

$$F=[f(x_1^0+h,\ x_2^0+h)-f(x_1^0+h,\ x_2^0)]-$$
$$-[f(x_1^0,\ x_2^0+h)+f(x_1^0,\ x_2^0)]. \qquad (49)$$

Мында h эң кичине сан, б.а. $x\left(x_1^0+h,\ x_2^0+h\right)$ чекити $x_0\left(x_1^0,\right.$ $\left.x_2^0\right)$ чекитинин δ аймагынан чыкпайт. (49) туюнтмасындагы F чоңдугун бир аргументтүү $\varphi(x_1)=f\left(x_1,\ x_2^0+h\right)-f\left(x_1,\ x_2^0\right)$

дифференцирленүүчү функциясынын $\left[x_1^0,\ x_1^0+h\right]$ сегментиндеги өсүндүсү катарында кароого болот, б.а. $\Delta\varphi=\varphi\left(x_1^0+h\right)-\varphi\left(x_1^0\right)=F$. Мындан Лагранждын формуласы боюнча төмөнкүнү алабыз:

$$F=\Delta\varphi=\varphi'\left(x_1^0+\theta h\right)h=\left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0+h\right)-f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0\right)\right]h=$$

$$=\left\{\left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0+h\right)-f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\right]-\left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\right]\right\}h,\ 0<\theta<1. \tag{50}$$

Мындагы f'_{x_1} функциясы $x_0\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан төмөнкүнү алабыз:

$$\left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0+h\right)-f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\right]=\left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0+h\right)-\right.$$

$$\left.-f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0+h\right)\right]+\left[f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0+h\right)-f'_{x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\right]=f''_{x_1x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\theta h+$$

$$f''_{x_1x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)h+\alpha_1\theta h+\beta_1 h,\ \left[f'_{x_1}\left(x_1^0+\theta h,\ x_2^0\right)-f'_{x_1}(x_1^0,\ x_2^0\right]=$$

$$=f''_{x_1x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)\theta h+\alpha_2\theta h,$$

мындагы $h\to 0$ да α_1, β_1 жана α_2 чексиз кичине чоңдуктар. Бул табылгандарды (50)гө коюп, төмөнкүнү алабыз, эгерде $h\to 0$ болсо,

$$F=\left[f''_{x_1x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\alpha\right]h^2, \alpha=\alpha_1\theta+\beta_1-\alpha_2\theta\to 0. \tag{51}$$

Башка жагынан алганда, (49)дагы, F ди бир аргументтүү $\psi(x_2)=f\left(x_1^0+h,\ x_2\right)-f\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ дифференцирленүүчү функциянын $\left[x_2^0,\ x_2^0+h\right]$ сегментиндеги өсүндүсү $\Delta\psi=\psi\left(x_2^0+h\right)-\psi\left(x_2^0\right)$ катарында кароого болот. Мурдагыдай эле Лагранждын формуласын колдонуп жана f'_{x_2} дин дифференцирленүүсүн эске алып, төмөнкүгө келебиз:

$$F=\left[f''_{x_2x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\beta\right]h^2. \tag{52}$$

мындагы $h \to 0$ да β — чексиз кичине чоңдук. Ошентип, (51) жана (52) барабардыктарынын оң жактарын барабарлап, h^2ка кыскартып, $f''_{x_1x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\alpha = f''_{x_2x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)+\beta$ барабардыгын алабыз. Мындан $h \to 0$ да, барабардыгы $f''_{x_1x_2}\left(x_1^0,\ x_2^0\right) = f''_{x_2x_1}\left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ келип чыгат. ●

1-эскертүү. Эгерде $x_0(x_1^0,\ x_2^0)$ чекитинин аймагында $u = f(x_1^0,\ x_2^0)$ функциясы $f'_{x_1},\ f'_{x_2},\ f''_{x_1x_2},\ f''_{x_2x_1}$ жекече туундуларына ээ болуп жана $f''_{x_1x_2},\ f''_{x_2x_1}$ жекече туундулары $x_0(x_1^0,\ x_2^0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда дагы ал чекитте экинчи тартиптеги аралаш жекече туундулар барабар болот, б.а.

$$f''_{x_1x_2}(x_1^0,\ x_2^0) = f''_{x_2x_1}(x_1^0,\ x_2^0).$$

2. Жогорку тартиптеги дифференциалдар.

Биз адегенде жогорку тартиптеги дифференциалды аныктоодо колдонуучу айрым түшүнүктөргө токтоло кетели.

Евклиддин R_n мейкиндигинин $h=(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$, $\eta = (\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n)$ эки чекитинен, б.а. $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$, $2n$ өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болгон төмөнкүдөй функцияны карайлы:

$$H(h,\eta) = H\left(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n\right) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}h_i\eta_\kappa, \quad (53)$$

мында $a_{i\kappa}$ берилген сандар, $i,\ \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Бул (53)төгү h же η чекитинин бирөөнү туруктуу десек, анда $H(h,\ \eta)$ функциябыз башка бир чекити боюнча сызыктуу болот, ошондуктан $H(h,\ \eta) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}h_i\eta_\kappa$ функциясын $h,\ \eta$ боюнча *бисызыктуу форма* дейбиз.

Ал эми,

$$A(h,h) = A(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n,\ h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}h_ih_\kappa \quad (54)$$

функциясы, $H(h, \eta)$ *бисызыктуу формасына туура келүүчү квадраттык форма* деп аталат.

Эгерде $a_{i\kappa} = a_{\kappa i}$, $i, \kappa = 1, 2, \ldots, n$ болсо, анда $H(h, \eta)$ бисызыктуу формасы жана ага туура келүүчү $\Phi(h, \eta)$ квадраттык формасы дагы симметриялуу форма болот. Мисалы, R_n мейкиндигиндеги $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ жана $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ эки векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

симметриялуу бисызыктуу форма болот, ал эми вектордун узундугунун квадраты $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ ага туура келүүчү симметриялуу квадраттык форма.

Жөнөкөй болсун үчүн бир жогорку тартиптеги дифференциалды эки аргументтүү функциялар үчүн карайлык. Эгерде $u = f(x_1, x_2)$ функциясы берилип, анын биринчи жана экинчи жекече туундуларынын бардыгы $\{M\}$ областында үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x_1, x_2)$ эки жолу үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болорун 5-параграфтын 2-пунктундагы 4-аныктамадан көргөнбүз. Ал эми 5-параграфтагы (34) формуладан $(n = 2)$ биринчи дифференциал төмөнкүчө:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2. \tag{55}$$

Мындагы $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ жогорудагы шарттын негизинде $\{M\}$ областында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар. Демек, биринчи дифференциал df өз кезегинде x_1, x_2 өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирленүүчү функция. Ыңгайлуулук үчүн ал дифференциалды δ символу менен белгилеп, биринчи дифференциалдын дифференциалын эсептесек:

$$\delta(df) = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2\right) = \left(\delta\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\delta\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \delta x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \delta x_2 \right) dx_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \alpha x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \delta x_2 \right) dx_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1 \delta x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (dx_1 \delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2 \delta x_2.$$

Бул эсептөөдө үзгүлтүксүз аралаш жекече туундулар өз ара барабар экендиги $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ эске алынды.

Ошентип, dx_1, dx_2, δx_1, δx_2 өзгөрүлмөлөрү боюнча симметриялуу бисызыктуу форманы алдык. Эгерде мында $\delta x_1 = dx_1$, $\delta x_2 = dx_2$ десек, анда ага туура келүүчү $d^2 f$ симметриялуу квадраттык форманы алабыз.

3-аныктама. *$u = f(x_1, x_2)$ функциясынын $\{M\}$ областындагы $x_0(x_1^0, x_2^0)$ чекитиндеги $d^2 f$ экинчи дифференциалы деп, (55) биринчи дифференциалынан болгон бисызыктуу формага туура келүүчү $f(x_1, x_2)$ функциясынын аргументтеринин дифференциалдарынын dx_1, dx_2 квадраттык формасын айтабыз*

$$d(df) = d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2, \qquad (56)$$

б.а. биринчи дифференциалдын дифференциалы экинчи дифференциал болот.

Мисалы.

$$u = x^2 y^3; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^2 y;$$

$$d^2 u = 2y^3 dx^2 + 12x^3 y^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Эгерде үчүнчү тартиптеги жекече туундулардын бардыгы үзгүлтүксүз болсо, анда экинчи тартиптеги дифференциалды дифференцирлеп $\delta(d^2 f)$ мурдагы сыяктуу эле $d^3 f$ үчүнчү дифференциалды табабыз ж.у.с. Эгерде m — тартиптеги

бардык жекече туундулар үзгүлтүксүз болсо, анда индукция боюнча m — тартиптеги дифференциалды да аныктоого болот. Ал үчүн $(m-1)$ — дифференциал аныкталып жана төмөнкү формула орун алат:

$$d^{m-1}f = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_{m-1}^{\kappa} \frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_1^{m-1-\kappa}\partial x_2^{\kappa}}\ \partial x_1^{m-1-\kappa}\partial x_2^{\kappa}. \qquad (57)$$

Мындан $m-1=1$ болсо, 1-дифференциал (55)ти алабыз, ал эми $m-1=2$ болсо, 2-дифференциал (56)ны алабыз. Эми биз, (57) формуласы m дифференциалы үчүн дагы орун аларын көрсөтөлү. Чындыгында дифференциалдын эрежесинин негизинде

$$\delta(d^{m-1}f) = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_{m-1}^{\kappa}\delta\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x_1^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa}}\, dx^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa}\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_m^{\kappa}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa}\delta x_1}\delta x_1 dx_1{}^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa}\delta x_2}dx_1{}^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa}\delta x_2\right).$$

Эгерде $\delta x_1 = dx_1$ жана $\delta x_2 = dx_2$ десек, анда

$$d^m f = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_m^{\kappa} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1-\kappa}\partial x_2^{\kappa}} dx_1^{m-1-\kappa}dx_2^{\kappa} + \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-1}^{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-1-p}\partial x_2^{p}} dx_1^{m-1-p}dx_2^{p}.$$

Экинчи кошулуучудагы суммалоо индекси pны $\kappa-1$ге алмаштырып жана $C_m^{\kappa} + C_m^{\kappa-1} = C_{m+1}^{\kappa}$ экендигин эске алып, биротоло төмөнкүгө келебиз:

$$d^m f = \sum_{\kappa=0}^{m-1} C_{m-1}^{\kappa} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-\kappa}\partial x_2^{\kappa}} = dx_1^{m-\kappa}dx_2^{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{m} C_{m-1}^{\kappa-1} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-\kappa}\partial x_2^{\kappa}} dx^{m-\kappa}dx_2^{\kappa} +$$

$$+ \sum_{\kappa=0}^{m} C_m^{\kappa} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m-\kappa}\partial x_2^{\kappa}} dx_1^{m-\kappa}dx_2^{\kappa}. \qquad (58)$$

Жогорудагы 3-аныктама көп аргументтүү $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы үчүн да орун алат.

$$d^2 f \,/_{x_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\kappa} dx_i dx_\kappa. \qquad (59)$$

Бул (57) жана (58) формулаларды салыштырып, индукциянын негизинде кийинки формуланын орун алышына ынанабыз.

2-эскертүү. m-дифференциалды, б.а. (58) формуланы символдук түрдө төмөнкүчө жазууга болот:

$$d^m f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^m f(x_1, x_2). \qquad (60)$$

Мында, эгер $m=2$ болсо, анда

$$d^2 f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^2 f(x_1, x_2) = C_2^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} \partial x_1^2 +$$

$$+ C_2^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + C_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2, \; C_2^0 = C_2^2 = 1, \; C_2^1 = 2.$$

Эки аргументтүү функция үчүн аныкталган жогорку тартиптеги дифференциал n аргументтүү функция үчүн да кадимкидей эле жайылтылат. $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын m-дифференциалы төмөнкү формула боюнча табылаарын белгилей кетели:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f(x_1, x_2, \ldots, x_1). \qquad (61)$$

3-эскертүү. Эгерде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чекитинде m жолу дифференцирленүүчү болуп, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтери $t_1, t_2, \ldots, t_k$ өзгөрүлмөлөрү боюнча сызыктуу функция болсо, анда $u = f[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$ татаал функциясынын m-дифференциалы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтери боюнча табылган (61) формуласы менен эле аныкталат.

Мисалы, эгерде $f(x, y) = x^3 - y^3$ болсо $d^3 u$ тапкыла.

△ Жогорудагы (58) формуланын ($m = 3$) негизинде

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f(x, y) = C_3^0 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + C_3^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy +$$

$$+ C_3^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + C_3^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

Мындагы $C_3^к$, $к=0,\ 1,\ 2,\ 3$ коэффициенттерин жана $\frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-к}\partial y^к}$, $к=\overline{0,3}$ жекече туундуларды таап ордуна коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$d^3(x^3-y^3)=6(dx^3-dy^3). \ \blacktriangle$$

3. Көп аргументтүү функция үчүн Тейлордун формуласы. Бир аргументтүү функция үчүн Тейлордун формуласы бизге белгилүү,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1},$$

мында c — ар кандай x_0 менен x тин арасындагы чекит. Эгерде $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$, $x-x_0=\Delta x=dx$ деп жогорку тартиптеги дифференциалды колдонсок, анда жогорку формула төмөнкүчө жазылат:

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=\frac{df(x_0)}{1!}+\frac{d^2f(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}d^mf(x_0)+$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(c). \qquad (62)$$

Мына ушул түрдөгү бир аргументтүү функция үчүн болгон Тейлордун формуласын көп аргументтүү функцияларга жайылтууга болот.

2-теорема. *Эгерде $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ чекитинин кандайдыр бир аймагында $m+1$ жолу дифференцирленүүчү болсо, анда ал функциянын толук өсүндүсү*

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)-f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$$

ошол чекитте төмөнкүчө туюнтулат:

$$\Delta f=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{m!}d^mf(x_0)+\frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(c), \qquad (63)$$

мында $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in U(x_0,\delta)$ жана ал ошол аймактагы $x(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ чекитинен көз каранды болгон аралыктагы чекит.

○ Жөнөкөйлүгүнө карата бул теореманы $u=f(x_1, x_2)$ эки аргументтүү функция үчүн далилдейли. Ал үчүн $x_0(x_1^0, x_2^0)$ чекитинин ε аймагынан эркибизче $y_0(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2)$ чекитин алып, ал x_0 жана y_0 чекиттерин түз сызык менен бириктирели. Анда ал түз сызыктын чекиттеринин x_1, x_2 координаталары t өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон сызыктуу функциялар болот:

$$x_1 = x_1^0 + t\Delta x_1, \; x_2 = x_2^0 + t\Delta x_2. \tag{64}$$

Мында $t \in [0,1)$ жана $t=0$ болсо, x_0 дүн, ал эми $t=1$ болгондо y_0 чекитинин координаталарын (64) дөн алабыз. Теореманын шарты боюнча $f(x_1, x_2)$ функциябыз $x_0(x_1^0, x_2^0)$ чекитинин $U(x_0, \delta)$ аймагында $m+1$ жолу дифференцирленүүчү болгондуктан $x_0\,y_0$ түз сызыгына да ал $m+1$ жолу дифференцирленүүчү t дан коз каранды болгон татаал функция болору (64) формуласынан көрүнүп турат,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, x_2^0 + t\Delta x_2) = F(t),$$

ошондой эле $\Delta f = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = F(1) - F(0)$.
Ошентип, (62) формуладагы ар кандай тартиптеги дифференциалдар x_1, x_2 аргументтери сызыктуу функция болгон $f(x_1, x_2) = f[x_1^0 + t\Delta x_1, x_2^0 + t\Delta x_2]$ татаал функциянын дифференциалдары болот да, мындай татаал функциянын ар кандай тартиптеги дифференциалдары, ушул параграфтагы 3-эскертүүнүн негизинде (60) формула боюнча аныкталат:

$$d^{\kappa} f(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2\right)^{\kappa} f(x_1^0, x_2^0) = d^m F(o), \; \kappa = \overline{1,m}$$

$$d^{m+1} f(c) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2\right)^{m+1} f(c_1, c_2) = d^{m+1} F(\theta t). \tag{65}$$

Мындагы $c_1 = x_1^0 + \theta\Delta x_1$, $c_2 = x_2^0 + \theta\Delta x_2$, $0 < \theta,\ \theta_1,\ \theta_2 < 1$.

Бул (65) формулалар боюнча табылгандарды $d^\kappa f(x_0)$, $\kappa = \overline{1, m}$ жана $d^{m+1}f(c)$ (60) га коюп, Тейлордун формуласы (63) $(m = 2)$ тү алабыз. ●

Эми биз Тейлордун формуласын жалпы учур үчүн жазалы, б.а. $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинин аймагындагы ажыралышы төмөнкүчө:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{\kappa=1}^{m} \frac{1}{\kappa!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right]^\kappa f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right]^{m+1} f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n). \quad (66)$$

Бул формуладагы акыркы кошулуучуну Лагранждын формуласындагы *калдык мүчө* деп аталып $R^{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ менен белгиленет.

Натыйжа. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы жогорудагы 2-теореманын шартын канааттандырса жана дагы $(m+1)$ тартиптеги бардык жекече туундулары үзгүлтүксүз болсо, анда калдык мүчө төмөнкүчө туюнтулат:*

$$R^{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i - x_i^0)\right]^{m+1} f\left[x_1^0 + t(x_1 - x_1^0),\ x_2^0 + t(x_2 - x_2^0),\ \ldots,\ x_n^0 + t(x_n - x_n^0)\right]dt.$$

Муну интегралдык формадагы же Кошинин формасындагы калдык мүчө дейбиз.

Калдык мүчөнү Пеанонун формасында жазса да болот:

$$R^{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = O(\rho^m).$$

Мында $\rho = \rho(x, x_0)$, ал эми $O(\rho^m)$ символу болсо, $x \to o$ да (же $x \to x_0$) кичинелик тартиби, б.а. $O(\rho^m)$ тартиби ρ^m дин тартибинен чоң болгон чексиз кичине функцияны билгизет.

§7. КӨП АРГУМЕНТТҮҮ ФУНКЦИЯНЫН ЭКСТРЕМУМУ

1. Көп аргументтүү функциянын экстремумунун түшүнүгү жана анын зарыл шарты.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы R_n мейкиндигиндеги $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталсын дейлик.

1-аныктама. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ мааниси $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинин δ — аймагындагы эң чоң (эң кичине) мааниси болсо*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) < 0,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in U(x_1^0, \dots, x_n^0, \delta),$$

$$(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) > 0,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in U(x_1^0, \dots, x_n^0, \delta)), \qquad (67)$$

анда ал функция ошол $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу максимумга (минимумга) ээ болот дейбиз.

2-аныктама. *Ал эми $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинде же ылайыктуу максимумга, же ылайыктуу минимумга ээ болсо, анда ал функцияны ошол чекитте ылайыктуу экстремумга ээ болот деп айтабыз.*

Эми биз $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын кандайдыр бир чекитте ылайыктуу экстремумга ээ болуусунун зарыл шартын келтирели.

1-теорема. *Эгерде* $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функциясы* $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *чекитинде* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *аргументтери боюнча биринчи тартиптеги бардык жекече туундуларга ээ болуп, ылайыктуу экстремумга жетишсе, анда ал бардык жекече туундулар ошол чекитте нөлгө барабир болушу зарыл, б.а.*

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_2}=0, \ldots, \quad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_n}=0 \quad (68)$$

○ Адегенде (68) шартынын биринчи барабардыгын далилдейли. Ал үчүн $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясынын $x_2, x_3, \ldots, x_n$ аргументтерин турактуу дейли, б.а. $x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$ болсун. Анда $u=f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ бир аргументтүү функциясын алабыз жана анын $x_1=x_1^0$ чекитиндеги туундусу $\frac{\partial f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}$ менен дал келет. Ал эми $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциябыз $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу экстремумга ээ болгондуктан, бир аргументтүү $u=f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ функциясы $x_1=x_0'$ чекитинде ылайыктуу экстремумга ээ болот. Ошондуктан анын туундусу ошол чекитте нөлгө барабар, б.а. $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)=0$. Ошентип (68) дин биринчи барабардыгы далилденди. Калгандары деле ушул сыяктуу далилденет. ●

Бул далилденген (68) зарыл шарт, ылайыктуу экстремумдун жетиштүү шарты боло албайт. Мисалы, $u=xy$ функциясынын бардык жекече туундулары $O(0,0)$ чекитинде нөлгө барабар: $u'_x=u'_y=0$, бирок $O(0,0)$ чекитинин ар кандай аймагынан $u=xy$ функциясынын оң жана терс маанилери табылат, б.а. ылайыктуу экстремумдун аныктамасы орун албайт.

3-аныктама. $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функциясынын бардык жекече туундулары нөлгө барабар болгон* $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

чекити ал функциянын туруктуу (стационардык) чекити деп аталат.

Көп аргументтүү функциянын дифференциалынын (5-параграфтын (34) негизинде ылайыктуу экстремумдун зарыл шартын башкача түрдө берүүгө болот.

2-теорема. *Эгерде $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитинде дифференцирленүүчү болуп ылайыктуу экстремумга ээ болсо, анда ал функциянын дифференциалы ошол чекитте нөлгө барабар, б.а.*

$$df(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = df/_{x_0} = 0.$$

○ Чындыгында,

$$df/_{x_0} = \frac{df}{dx_1}\Big/_{x_0} dx_1 + \frac{df}{dx_2}\Big/_{x_0} dx_2 + \ ... \ + \frac{df}{dx_n}\Big/_{x_0} dx_n$$

болгондуктан, (68) ин негизинде $df/_{x_0} = df/_{(x_1^0,...,x_n^0)} = 0.$

Мисалы, $u = x^2 + y^2$ функциясынын $u'_x = 2x = o$, $u'_y = 2y = o$ болгондуктан, O(o,o) туруктуу чекити жана $du/_{(0,0)} = 0$ болот. ●

2. Көп аргументтүү функциянын ылайыктуу экстремумунун жетиштүү шарты.

Көп аргументтүү $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ чекитиндеги ылайыктуу экстремумунун жетиштүү шартын аныктоодо ал функциянын ошол чекиттеги экинчи дифференциалы чечүүчү ролду ойнойт. Биз, 6-параграфтын 2- пунктунда эки жолу дифференцирленүүчү $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын 2-дифференциалы, dx_1, dx_2, ..., dx_n дерге карата квадраттык форма болорун көрдүк,б.а.

$$d^2f/_{x_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} dx_i dx_\kappa \qquad (69)$$

Мында

$$a_{i\kappa} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\kappa}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0). \qquad (70)$$

Демек, ылайыктуу экстремумдун жетиштүү шартын аныктоо үчүн квадраттык форма жөнүндөгү кээ бир түшүнүктөр колдонулат, ошондуктан аларга токтололу.

4-аныктама *Эгерде $h_1, h_2, \ldots, h_n$ дерге карата болгон квадраттык форма*

$$\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} h_i h_\kappa \tag{71}$$

бир убакта бардыгы нөлгө барабар болбогон $h_1, h_2, \ldots, h_n$ дердин маанилери үчүн бул форма оң же терс мааниге ээ болсо, анда аны оң аныкталган же терс аныкталган форма дейбиз.

5-аныктама. *Эгерде квадраттык форма (71) оң гана же терс гана аныкталса, анда аны аныкталган белгидеги форма дейбиз. Ал эми, (71) формасы оң да терс да аныкталган болсо, анда аны өзгөрмө белгидеги форма дейбиз.*

Төмөнкү матрицаны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{72}$$

(71) *квадраттык формасынын матрицасы* дейбиз. Эгерде A матрицасынын бардык элементтери $a_{i\kappa} = a_{\kappa i}$, $i, \kappa = \overline{1, n}$ барабардыгын канаатандырса, анда ал *симметриялуу матрица* болот. Симметриялуу матрицасынын башкы диагоналы боюнча жайланышкан төмөнкүдөй аныктагычтарды

$$A_1 = a_{11},\; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\; \ldots,\; A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анын башкы *минорлору* деп аталат.

Сильвестрдин эрежесин (критерийин) келтирели:

1) Эгерде симметриялуу (72) матрицалуу (71) квадраттык формасынын бардык башкы минорлорунун оң болушу, б. а.

$A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \ldots,\ A_n > 0$ анын оң аныкталган форма болушуна зарыл жана жетиштүү болот.

2) Ал эми симметриялуу (72) матрицалуу (71) квадраттык формасы терс аныкталган болушу үчүн анын башкы минорлору алмашылган белгиде, б. а. $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ \ldots$ болушу зарыл жана жетиштүү болот.

3-теорема. (Ылайыктуу экстремумдун жетиштүү шарты.)

Эгерде $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ туруктуу чекитинин кандайдыр бир аймагында эки жолу дифференцирленүүчү болуп, ошол чекитте бардык жекече туундулары үзгүлтүксүз болсо жана экинчи дифференциал $d^2 f/(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, аргументтердин дифференциалдары $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ боюнча аныкталган белгидеги квадраттык форма болсо, анда $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу экстремумга ээ болот. Тагыраак айтканда, эгерде $d^2 f\Big/_{(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)} < 0$ болсо, анда ал чекитте ылайыктуу максимумга, $d^2 f\Big/_{(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)} > 0$ болсо ылайыктуу минимумга ээ болот. Ал эми $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ чекитинде экинчи дифференциал $d^2 f$ өзгөрүлмө белгидеги квадраттык форма болсо, анда ал чекитте $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясы ылайыктуу экстремумга ээ болбойт.

○ Адегенде теореманын биринчи бөлүгүн далилдейли. Ал үчүн $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясын $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ чекитинин аймагында калдык мүчөсү Пеанонун формасындагы Тейлордун формуласы боюнча ажыратып, экстремумдун зарыл шартын эске алып, төмөнкүчө жазабыз:

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) - f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) + \\ + O(\rho^2). \qquad (73)$$

Мында Пеанонун формасындагы калдык мүчө көз каранды болгон ρ төмөнкүгө барабар:

$$\rho=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2}=$$
$$=\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+...+(dx_n)^2}. \qquad (74)$$

Теореманын шарты боюнча $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ чекити $u=$ $=f(x_1,\ ...,\ x_n)$ функциясынын туруктуу чекити болгондуктан $df(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)=0$ болот жана (73)түн оң жагындагы 2-дифференциалда $dx_i=x_i-x_i^0=h_i,\ i=\overline{1,n}$.

Ошондуктан төмөнкүнү алабыз:

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)-f(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_1^0,\ ...,\ x_n^0)}{\partial x_i\partial x_\kappa}dx_i\partial x_\kappa+$$
$$+O(\rho^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}(x_i-x_i^0)(x_\kappa-x_\kappa^0)+O(\rho^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}h_ih_\kappa+O(\rho^2). \qquad (75)$$

Эгерде $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)-f(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)>0$ болсо, анда 1-аныктаманын негизинде $u=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу минимумга ээ болот. Ал эми (75)тин оң жагындагы калдык мүчө $O(\rho^2)$, $\rho\to 0$ да, биринчи кошулуучу $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}h_ih_\kappa$ — экинчи дифференциалга караганда жогорку тартиптеги чексиз кичинелүүк болгондуктан, $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ чекитинин δ — аймагында $(0<\rho<\delta)$ оң жагынын белгиси биринчи кошулуучунун, б.а. экинчи дифференциалдын белгисине жараша болот. Бизге белгилүү, (§ 6, 3-аныктама) 2-дифференциал аргументтердин дифференциалдары $dx_1,\ dx_2,\ ...,\ dx_n$ ге карата квадраттык форма. Ошондуктан экинчи дифференциалдын белгисин *Сильвестрдин эрежеси боюнча аныктайбыз.*

Ошентип $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)>0$, б.а. 2-дифференциал оң аныкталган квадраттык форма болсо, анда $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы туруктуу $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу минимумга ээ болорун далилдедик. Эгерде $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)<0$, б.а. терс аныкталган квадраттык форма болсо, анда $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу максимумга ээ болорун ушул сыяктуу эле далилдейбиз.

Эми, эгерде $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ 2-дифференциал өзгөрүлмө белгидеги квадраттык форма болсо, анда $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы $x_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ чекитинде ылайыктуу экстремумга ээ болбосун көрсөтөлү. Ал үчүн $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументтеринин $\Delta x_i' = x_i' - x_i^0 = h_i'$, $i=\overline{1,n}$ өсүндүлөрү үчүн $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)>0$ ал эми $\Delta x_i''=x_i''-x_i^0=h_i''$, $i=\overline{1,n}$ өсүндүлөрү үчүн $d^2f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)<0$ болсун дейлик. Анда (75) формуланын жана жогорудагы талдоолордун негизинде тийиштүү $\Delta x_i'$ жана $\Delta x_i''$ үчүн төмөнкүлөрдү алабыз:

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i \partial x_\kappa} dx_i \partial x_\kappa + O(\rho_1^2) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} h_i' h_\kappa' + O(\rho_1^2) > 0,\ \rho_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i' - x_i^0)^2,$$

$$f(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1 \partial x_\kappa} dx_i dx_\kappa + \\ + O(\rho_2^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} h_i' h_\kappa'' + O(\rho_2^2) < 0,\ \rho_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i'' - x_i^0)^2.$$

Демек, бул учурда $x_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$ чекитинин аймагында $u=f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ функциясы үчүн ылайыктуу экстремумдун аныктамасы (§ 7, 1-аныктама) орун алган жок, ошол себептүү экстремумга ээ болбойт. ●

Мисалдар. 1). $f(x,y)=-x^2-y^2$ функциясынын ылайыктуу экстремумун табалы: △ $f_x'(x,y)=-2x=0,\ f_y'(x,y)=-2y=0$. Демек, туруктуу чекити (0,0) болот.

Ал эми $A_1=-2<0,\ A_2=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=4>0$.

Ошондуктан, $d^2f(0,0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(0,0)=-2dx^2+8dxdy-$ $-2dy^2<0$. Ошентип, (0,0) чекитинде $f(x,y)=-x^2-y^2$ функциясы ылайыктуу максимумга ээ болот. ▲

2) $f(x,y,z)=x^2+xy+2xz+4yz+5y^2+9z^2$,

△ функциясынын ылайыктуу экстремумун, б.а. адегенде анын туруктуу чекитин табалык:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+2z=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x+4z+10y=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2x+4y+18z=0.$$

Бул системанын аныктагычы

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 10 & 4\\ 2 & 4 & 18\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 10 & 4\\ 1 & 2 & 9\end{vmatrix}=2\cdot 143>0.$$

Ошондуктан, бир тектүү системабыз бир гана $x=0,\ y=0,\ z=0$ чечимине ээ болот. Демек, (0, 0, 0) туруктуу чекити. Эми $d^2f(0,\ 0,\ 0)$ ди эсептейли:

$$d^2f(0,\ 0,\ 0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f(0,\ 0,\ 0)=$$

$$=2dx^2+2dxdy+4dxdz+8dydz+4dy^2+18dz^2$$

Сильвестрдин эрежеси боюнча

$$A_1 = 2 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} > 0,\ A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 18 \end{vmatrix} > 0$$

болгондуктан, $d^2f(0,\ 0,\ 0)$ квадраттык форма оң аныкталган болот, б.а. $d^2f(0,\ 0,\ 0) > 0$. Демек, $(0,\ 0,\ 0)$ чекитинде $f(x,\ y,\ z) = x^2 + xy + 2xz + 4yz + 5y^2 + 9z^2$ функциясы ылайыктуу минимумга ээ болот. ▲

3) $u = x^2 - y^2$.

△ Экстремумдун зарыл шарты боюнча

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = 0.$$

Бул системанын аныктагычы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ жана $x = 0$, $y = 0$. Экинчи дифференциал — квадраттык форма $d^2u(0,\ 0) = $
$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u(0,\ 0) = 2dx^2 - 2dy^2$ жана анын аныктагычы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$ болот. Мындан $A_1 = 2 > 0$, $A_2 = -4 < 0$.
Демек, ылайыктуу экстремуму жок. ▲

Көпчүлүк учурларда эки аргументтүү $u = f(x,\ y)$ функциясынын экстремумун табууга туура келет, ошондуктан бул учурга кыскача токтоло кетели. Ал үчүн төмөнкүндөй белгилөөлөрдү киргизели:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = f''_{xx}(x_0,\ y_0) = a_{11},\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} = f''_{xy}(x_0,\ y_0) = a_{12},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = f''_{yy}(x_0,\ y_0) = a_{22},$$

$M_0 = (x_0,\ y_0)$ туруктуу чекити.

4-теорема. *Эгерде $u = f(x,\ y)$ функциясы $M_0(x_0,\ y_0)$ чекитинде эки жолу дифференциалдануучу болсо жана ал* *чекитте бардык жекече туундулары үзгүлтүксүз болуп, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ барабарсызыгы орун алса, $u=f(x,\ y)$ функциясы ошол $M_0(x_0,\ y_0)$ чекитинде ылайыктуу экстремумга ээ болот, тактап айтканда $a_{11}<0$ болсо максимумга жана $a_{11}>0$ болсо минимумга ээ болот. Эгерде $M_0(x_0,\ y_0)$ туруктуу чекитинде $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ болсо, анда $u=f(x,\ y)$ функциясы ал чекитте ылайыктуу экстремумга ээ болбойт.*

Бул теореманын далилдөөсү $A_1=a_{11}$, $A_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ болгондуктан 3-теоремадан келип чыгат.

§ 8. АЙКЫН ЭМЕС ФУНКЦИЯЛАР

1. Бир теңдеме менен аныкталган айкын эмес функциялар.

Математикада жана анын колдонулуштарында $y=f(x)$ функционалдык көз карандылыгы

$$F(x,\ y)=0 \tag{76}$$

функционалдык теңдемеси менен да берилет. Бул теңдеменин сол жагындагы $F(x,\ y)$ функциясы R_2 тегиздигиндеги G көптүгүндө аныкталган эки аргументтүү функция экендиги көрүнүп турат.

1-аныктама. *Эгерде R_2 тегиздигиндеги G көптүгүндө эки аргументтүү $F(x,\ y)$ функциясы берилип, G көптүгүнүн $0X$ огундагы проекциясы болгон G_x көптүгүндө аныкталган $y=f(x)$ бир аргументтүү функциясы табылып жана $F(x,\ f(x))=0$ теңдештиги орун алса, анда $f(x)$ функциясы $F(x,\ y)=0$ теңдемеси аркылуу аныкталуучу айкын эмес функция деп аталат.*

18*

Мисалы, $y=\sqrt{1-x^2}$ функциясы айкын эмес түрдө төмөнкүдөй функционалдык теңдеме $F(x, y)=y^2+x^2-1=0$ түрүндө бериле алат. Жогорудагы (76) теңдемеси кандай шарттардын негизинде бир маанилүү түрдө $y=f(x)$ функциясын аныктайт жана ал кандай шарттарда үзгүлтүксүз, ошондой эле дифференцирленүүчү функция болот деген суроолор пайда болот. Ушул суроолого жооп иретинде, (76) теңдемеден бир маанилүү жана дифференцирленүүчү айкын эмес функцияны аныктоонун жетиштүү шарттарына токтололу.

1-теорема. *Эгерде* $F(x, y)=0$ *теңдемеси жана* $F(x, y)$ *функциясы төмөнкү шарттарды канааттандырса:*

1) $F(x, y)$ *функциясы* $U((x_0, y_0))=\{(x,y):|x-x_0|<h,$ $|y-y_0|<d\}$ *тик бурчтуу аймагында аныктальп үзгүлтүксүз жана* $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсо,*

2) $F(x_0, y_0)=F(M_0)=0,$

3) $F'_y(x_0, y_0)=F'_y(M_0)\neq 0.$

Анда:

а) x_0 *жана* y_0 *чекиттеринин тийиштүү* $U(x_0)=$ $=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *жана* $U(y_0)=(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$ *аймактары табылып, ар кандай* $x\in U(x_0)$ *үчүн (76) теңдемесинин бир гана* $y=f(x)\in U(y_0)$ *чечими болот жана* $y_0=f(x_0)$ *орун алат.*

б) $U(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *аймагында* $y=f(x)$ *функциясы үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү, ал эми анын туундусу*

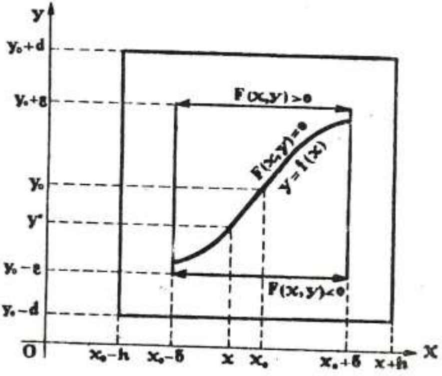
$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \tag{77}$$

формуласы менен аныкталат.

○ Теореманын жыйынтыгындагы ар бир пунктту өз алдынча далилдейли. а) Теоремадагы 3) шарты боюнча $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ болгондуктан, $F'_y(x_0, y_0) > 0$ болсун дейлик. Анда $0 < \varepsilon < d$ саны табылып $F(x_0, y)$ функциясы $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon$ аймагында аргументи боюнча бир кылка (монотондуу) өсүүчү жана $F(x_0, y_0) = 0$ болгондуктан төмөнкү барабарсыздыктар орун алат:

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0. \tag{78}$$

$U(x_0)$ аймагынан алынган x тин ар кандай мааниси үчүн $F(x, y)$ функциясы $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ кесиндисинде y боюнча үзгүлтүксүз функция болот. Анда (78) шартынан үзгүлтүксүз функциянын арадагы мааниси жөнүндөгү Кошинин теоремасынын негизинде $y* \in U(y_0)$ мааниси табылып $F(x, y*) = 0$ барабардыгы орун алат (41-чийме). Ал эми $F(x, y)$ функциясынын $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ кесиндисинде y өзгөрүлмөсү



41-чийме

боюнча монотондуу өсүүчү болгондугунун негизинде ал табылган функция $y^* \in U(y_0)$ жалгыз гана болот. Ошентип $x \in U(x_0)$ өзгөрүлмөсү менен $y^* \in U(y_0)$ өзгөрүлмө чоңдуктарынын ортосундагы өз ара бир маанилүү туура келүүчүлүктү алдык, аны $y^* = f(x)$ аркылуу белгилеп жазалык. Теореманын шарты боюнча $x_0 \in U(x_0)$, $y_0 \in U(y_0)$ жана $F(x_0, y_0) = 0$. Ошондой эле $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$ функциясы жалгыз болгондуктан $y_0 = f(y_0)$ барабардыгы орун алат.

б) Айкын эмес функциянын үзгүлтүксүздүгүн төмөнкүдөй эреженин негизинде далилдейбиз, *эгерде x аргументинин өсүндүсү $\Delta x \to 0$ ага туура келүүчү y функциясынын өсүндүсү $\Delta y \to 0$*. Ал үчүн (x_0, y_0) чекитинде F'_x жана F'_y жекече туундулары үзгүлтүксүз жана $F(x, y)$ функциясынын дифференцирленүүчүлүгүн эске алсак:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \qquad (79)$$

Мында $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Эгерде (79) формулада $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ болсо, анда $F(x, f(x)) = 0$, $x \in U(x_0)$, $y \in U(y_0)$ шарты боюнча $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0$ болот жана дагы $F(x_0, y_0) = 0$ экендигин эске алсак, анда (79)дан

$$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = 0$$

барабардыгы келип чыгат. Мындан,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \qquad (80)$$

Шарт боюнча $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ үзгүлтүксүз, ошондуктан алар $\overline{U}(x_0, y_0) = \{(x, y): |x - x_0| \leq \delta, \ |y - y_0| \leq \varepsilon\}$ областында тийиштүү түрдө даана жогорку M жана даана төмөнкү m чегине жетише алышат жана ε_1, ε_2 чектелген чоңдуктар. Ушулардын негизинде (80)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| < \frac{M}{m}, \; 0 < |\Delta y| < \frac{M}{m}|\Delta x|.$$

Мындан $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$ келип чыгат. Ал эми $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүн эске алсак, анда $\Delta x \to 0$ да $\Delta y \to 0$ жана дагы $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, ошол себептен (80) формулада

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Демек, $\Delta x \to 0$ (80) дин оң жагынын чеги жашайт:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{81}$$

Эскертүү. Эгерде (x_0, y_0) чекитинин $U(x_0, y_0)$ аймагында $F'_x(x, y)$ жана $F'_y(x, y)$ үзгүлтүксүз болушса, анда айкын эмес функциясынын туундусу $f'(x)$ функциясы $U(x_0)$ интервалында үзгүлтүксүз. Чындыгында (81) формуланы ар кандай $x \in U(x_0)$ чекити үчүн колдонсок төмөнкүгө ээ болобуз:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \tag{81'}$$

Мунун оң жагынан үзгүлтүксүз функциялардын композициясы жөнүндөгү теореманын негизинде $U(x_0)$ аймагында $f'(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү келип чыгат.

Көп аргументтерден көз каранды болгон

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0 \tag{82}$$

айкын эмес функциясынын түшүнүгү жогорудагы бир аргументтен көз каранды болгон (76) функциянын түшүнүгү сыяктуу эле аныкталат. Мында x аргументин n өлчөмдүү мейкиндиктин $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ чекити деп карасак, анда 1-теоремага ылайык келүүчү теореманы келтирүүгө болот.

2-теорема. *Эгерде $F(x,\ y)=F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ y)=0$ теңдемеси жана $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ y)=F(x,\ y)$ функциясы төмөнкү шарттарды канааттандырса:*

1) *$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ y)$ функциясы $U((x^0,\ y^0))=\{(x,\ y): :\left|x-x_i^0\right|<h_i,\ \left|y-y^0\right|<d,\ i=\overline{1,n}\}$ аймагында аныкталып үзгүлтүксүз жана үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсо:*

2) $F(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y^0)=F(x^0,\ y^0)=0$;

3) $F'_y(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y^0)=F'_y(x^0,\ y^0)\neq 0.$

Анда:

а) $x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ жана y^0 чекиттеринин тийиштүү $U(x^0)=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n): \left|x_i-x_i^0\right|<\delta_i,\ i=\overline{1,n}\}$ жана $U(y^0)= =(y^0-\varepsilon,\ y^0+\varepsilon)$ аймактары табылып, ар кандай $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in U(x^0)$ үчүн (82) теңдемесинин бир гана $y=f(x)= =f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\in U(y^0)$ чечими болот жана $y^0=f(x^0)= =f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$.

б) $U(x^0)=\{(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n): \left|x_i-x_i^0\right|<\delta_i,\ i=\overline{1,n}\}$ аймагында $y=f(x)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ үзгүлтүксүз жана бардык $f'_{x_i}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ i=\overline{1,n}$ жекече туундулары жашайт жана үзгүлтүксүз. Мындагы (82) формула менен аныкталган айкын эмес функциянын жекече туундулары төмөнкү формула менен табылат:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},\ i=\overline{1,n}. \tag{83}$$

Мисалы.

$$F(x,\ y)=y\ln x-x^2e^y+1=0 \tag{84}$$

теңдемеси менен аныкталган айкын эмес функция берилсин. Мындагы $F(x,\ y)$ функциясы жана анын жекече туундулары $x>0$ болгон жана ар кандай y үчүн аныкталышып, үзгүлтүксүз болушат. Демек, $F(x_0, y_0)=0$ жана $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$ болгондой (x_0, y_0) чекитин алууга болот. Чындыгында (1,0) чекитинде $F(1{,}0)=0-1+1=0$ жана $F'_y(1,\ 0)=(\ln x - x^2e^y)_{\substack{x=1\\ y=0}}=-1.$

Ошондуктан (1,0) чекитинин аймагында берилген (84) теңдемеси бир гана x тен коз каранды болгон айкын эмес функцияны аныктайт. Анын жекече туундусу (81′) формуласы менен аныкталат.

$$y'=-\frac{\dfrac{y}{x}-2xe^y}{\ln x-x^2e^y}=\frac{y-2x^2e^y}{x(\ln x-x^2e^y)}.$$

2. Теңдемелердин системасы менен аныкталган айкын эмес функциялар.

Биз теңдемелердин системасы менен аныкталган айкын эмес функциялардын түшүнүгүн кароодон мурда, ага керек болуучу көптүктордүн кобойтүндүсү жөнүндөгү ж.б. жардамчы түшүнүкторго токтололу.

Эгерде $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R_x^n$ — n олчомдүү жана $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R_y^m$ — m олчомдүү Евклиддин мейкиндиктеринин чекиттери болсо, анда $(x, y)=(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R_{xy}^{n+m}$ — $(n+m)$ олчомдүү Евклиддин мейкиндигинин чекити болот.

2-аныктама. *Эгерде $x\in A\subset R_x^n$ жана $y\in B\subset R_y^m$ болсо, анда R_{xy}^{n+m} мейкиндигиндеги (x, y) чекиттеринин көптүгү A жана B көптүкторүнүн кобойтүндүсү деп аталып томонкучо белгиленип жазылат:*

$$A\times B=\{(x, y): x\in A,\ y\in B\}.$$

Мисалы, $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\in R_x^n$ жана $A=Q(x^0, \delta_1, \ldots, \delta_n)=\{x: |x_i-x_i^0|<\delta_i,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ — x_0 чекитинин аймагы, ошондой эле $y^0=(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)\in R_y^m$ жана

$B = D(y^0, \eta_1, \ldots, \eta_m) = \{\,\,|y_j - y_j^0| < \eta,\ j = 1, 2, \ldots, m\} - y_0$ чекитинин аймагы болушса, анда A жана B көптүктөрүнүн көбөйтүндүсү

$$A \times B = \{(x, y): |x_i - x_i^0| < \delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ |y_j - y_j^0| < \eta_j,$$
$$i = 1, 2, \ldots, m\} = U((x^0, y^0);\ \delta_1, \ldots, \delta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m). \quad (84)$$

(x^0, y^0) чекитинин R_{xy}^{n+m} мейкиндигиндеги тик бурчтуу аймагы болот.

Кандайдыр бир $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$ чекитинде бардык биринчи тартиптеги жекече туундуларга ээ болушкан

$$u_j = u_j(t_1, t_2, \ldots, t_n),\ j = 1, 2, \ldots, m \quad (85)$$

функцияларынын системасы берилсин.

3-аныктама. $u_j = u_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *функцияларынын* $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0)$ *чекитиндеги жекече туундуларынан түзүлгөн төмөнкүдөй матрица*

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial t_n} \end{Vmatrix} = \left\| \frac{\partial u_j}{\partial t_i} \right\|,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

берилген функциялардын системасы (85) үчүн Якобинин матрицасы деп аталат. Эгерде m=n болсо, анда Якобинин матрицасынын аныктагычы берилген $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *функциясынын системасынын* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *өзгөрүлмөлөрү боюнча болгон Якобинин аныктагычы же Якобианы деп аталып,* $\dfrac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \left|\dfrac{\partial u_j}{\partial t_i}\right|, i, j = 1, 2, \ldots, m$ *символу менен белгиленет.*

Эми биз томондогүдөй теңдемелердин системасынын

$$F_j(x,y)=0,\ j=1,2,\ \dots,\ m,\ x\in R^n,\ y\in R^m, \tag{86}$$

тагыраак жазганда

$$\begin{aligned} &F_1(x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_m)=0,\\ &F_2(x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_m)=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &F_m(x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_m)=0, \end{aligned} \tag{87}$$

айкын эмес $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_m$ функцияларга карата кандайдыр бир $(x^0,\ y^0)$ чекитинин аймагында бир маанилүү чечилишинин шарттары жөнүндөгү теореманы далилдөөсүз келтирели.

3-теорема *Эгерде* $F_j(x,\ y)=F_j(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_m)$, $j=1,\ 2,\ \dots,\ m$ *функциялары* $(x^0,\ y^0)=(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_n^0)$ *чекитинин* $U(x^0,\ y^0,\ \delta_1,\ \dots,\ \delta_n,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_n)$ *аймагында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болушуп,* $F_j(x^0,\ y^0)=F_j(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_m^0)=0$ *барабардыгы орун алса жана ошол* $(x^0,\ y^0)$ *чекитинде* $\dfrac{\partial(F_1,\ \dots,\ F_m)}{\partial(y_1,\ \dots,\ y_m)}=\left|\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|,\ i,j=\overline{1,m}$ *Якобианы нөлгө барабар болбосо, анда* $x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$ *жана* $y^0=(y_1^0,\ y_2^0,\ \dots,\ y_m^0)$ *чекиттеринин тийиштүү* $U_x=U(x_1^0,\ \delta_1,\ \dots,\ \delta_n)\subset R_x^n$ *жана* $U_y=U(y^0,\ \eta_1,\ \dots,\ \eta_m)\subset R_y^m$ *аймактары табылып, ар кандай* $x\in U_x$ *үчүн берилген (87) системанын бир гана чечими* $y=f(x)=\{y_k=f_k(x_1,\ \dots,\ x_n),\ k=1,\ \dots,\ m\}$ *болот, ал чечимдин түзүүчүлөрү* $f_k=(x),\ k=1,\ \dots,\ m$ *бул* U_x *аймагында үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү жана* $y^0=f(x^0)$, *б.а.*

$$y_1^0=f_1(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0),$$

$$y_2^0 = f_2(x_1^0, \dots, x_n^0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_m^0 = f_m(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

барабардыктары орун алат.

3. Функциялардын туюндуруучулугу (көз карандылыгы). R^n мейкиндигинин G ачык көптүгүндө үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялардын системасы берилсин.

$$y_j = \varphi_j(x),\ j = 1, \dots, m;\quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G. \qquad (88)$$

4-аныктама. *Эгерде* $R^{m-1}_{y_1 \dots y_{m-1}}$ *мейкиндигинин* D *ачык көптүгүндө үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция* $\Phi(y_1, \dots, y_{m-1})$ *табылып, ар кандай* $x \in G$ *үчүн төмөнкү шарттар:* $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)) \in D$ *жана* $\varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x))$ *орун алса, анда* $\varphi_m(x)$ G *көптүгүндө* $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ *функциялары аркылуу туюндурулуучу (көз каранды) функция деп аталат.*

5-аныктама. *Эгерде функциялардын (88) системасынын ичинен бирөө эле* G *көптүгүндө калгандары аркылуу туюнтула турган болсо, анда ал система* G *көптүгүндө туюндурулуучу (көз каранды) деп атайбыз. Эгерде (88) системанын ичинен бир да функция* G *көптүгүндө калгандары аркылуу туюндурулбаса, анда ал системаны туюндурулбоочу (көз каранды эмес) деп атайбыз.*

4-теорема. *(Функциялардын туюндуруучулугунун зарыл шарты). Эгерде* $m \leq n$ *болуп жана ачык* D *көптүгүндө функциялардын системасы (88) туюндурулуучу болушса, анда ал система үчүн болгон*

$$\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|,\ j = 1, \dots, m,\ i = 1, \dots, n \qquad (89)$$

Якобианын матрицасынын рангы m *ден кичине болот.*

○ Теореманын шарты боюнча D көптүгүндө функциялардын системасы (88) туюндурулуучу болгондуктан, жок дегенде алардын бир функциясы калгандары аркылуу туюндурулат. Аныктык үчүн $\varphi_m(x)$ калган $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ аркылуу туюндурулсун дейлик:

$$u_m = \varphi_m(x) = \Phi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)),\ x \in D.$$

Мындагы Φ — бардык аргументтери боюнча үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция, б.а.

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},\ i = 1, \dots, n.$$

Бул формуладан D көптүгүндө берилген (88) функциялардын системасы үчүн болгон Якобиандын матрицасындагы m-жөөкчө калган жөөкчөлордүн сызыктуу комбинациясы болоору көрүнүп турат. Демек, ошол себептүү D көптүгүнүн ар бир x чекитинде Якобиандын матрицасынын рангы m ден кичине болот. ●

1-натыйжа. *Эгерде $m=n$ болуп (88) функцияларынын системасы D көптүгүндө туюндурулуучу болушса, анда алардын $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}$ Якобианы D көптүгүнүн ар бир чекитинде нөлгө барабар болот.*

2-натыйжа. (Функциялардын туюндурулбоосунун жетиштүү шарты). *Эгерде $m \leqslant n$ болуп жана (88) функциялар үчүн болгон Якобиандын матрицасынын $\left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\|$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ рангы D ачык көптүгүнүн бир эле чекитинде m ге барабар болсо, анда (88) системасы D көптүгүндө туюндурулбоочу (көз каранды эмес) болушат.*

Функциялардын системасы (88) үчүн болгон Якобиандын матрицасынын жөөкчөлөрү ошол системанын функцияларынын градиенттеринин координаталары болорун эске алсак, анда 1-теорема төмөнкүчө айтылат:

Эгерде (88) функциялардын системасы D областында туюндурулуучу (көз каранды) болушса, анда ал функциялардын градиенттери $\nabla\varphi_1, \dots, \nabla\varphi_m$ ошол D областынын ар бир чекитинде сызыктуу көз каранды болушат. Эми биз функциялардын системасынын көз карандылыгынын жетиштүү шартын төмөнкүчө келтирели.

5-теорема. (Функциялардын туюндуруучулугунун жетиштүү шарты). Эгерде D ачык көптүгүнүн ар бир чекитинде (88) функцияларынын системасы үчүн болгон Якобианын (89) матрицасынын рангы r ден ашпаса, мында $r < m \leq n$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ өзгөрүлмөлөрү жана $\varphi_{j_1}(x), \ldots, \varphi_{j_r}(x)$ функциялары табылып, D көптүгүнүн кандайдыр бир x^0 чекитинде алардын Якобианы

$$\left.\frac{\partial(\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_r})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}\right|_{x^0} \neq 0, \tag{90}$$

анда (90) шартын аткарган бардык r функциялары D көпчүлүгүндө көз каранды эмес болушат, ал эми x^0 чекитинин D көптүгүндөгү аймагында калган $m-r$ функциялары ошол r функциялардан көз каранды болушат.

Бул теореманын далилдөөсүн [5] окугула.

М и с а л ы, $\varphi_1(x, y) = sin(x+y)$, $\varphi_2(x, y) = cos(x+y)$ функцияларынын системасын карасак, анда анын Якобианын тегиздиктин бардык чекиттеринде нөлгө барабар.

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos(x+y) & cos(x+y) \\ -sin(x+y) & -sin(x+y) \end{vmatrix} = 0.$$

Демек, тегиздиктин бардык чекитинде бул функциялардын системасы үчүн түзүлгөн Якобиандын матрицасынын рангы $r = 1 < 2 = m = n$. Анда 5-теореманын негизинде берилген функциялар көз каранды болушат, б.а. бири экинчиси аркылуу туюнтулат. М и с а л ы, $cos(x+y) > 0$ болгон тегиздиктин (x, y) чекиттеринде

$$\varphi_2(x, y) = \sqrt{1-\varphi_1^2(x, y)} = cos(x+y) = \sqrt{1-sin^2(x+y)}$$

болуп туюндурулат.

4. Шарттуу экстремум.

Мурдагы § 7де көп аргументтүү функциянын экстремуму жана аны табуунун эрежеси менен таанышкан элек. Айрым учурларда аргументтери кандайдыр бир кошумча шарттарды канааттандырган көп аргументтүү функциянын экстремумун издөөгө туура келет.

R_n мейкиндигиндеги ачык G көптүгүндө

$$y_j = f_j(x),\ j = 1, \ldots, m;\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in G \qquad (91)$$

функциялары берилсин. Ал эми G көптүгүндөгү $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$ бардык функциялары нөлгө барабар болгон чекиттеринин көптүгү D менен белгилейли:

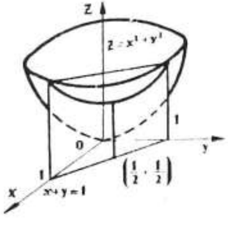
$$D = \{x : f_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \in G\} \qquad (92)$$

Анда

$$f_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, m \qquad (93)$$

теңдемелердин, *байланыш теңдемелери* деп атайбыз.

6-аныктама. *Эгерде G көптүгүндө $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ функциясы берилип, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ чекити (93) байланыш теңдемелерин канааттандырса жана ал чекитинин $x \in U(x^0) \cap D$ аймагында $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$) барабарсыздыгы орун алса, анда $y = f(x)$ функциясы (93) байланыш теңдемесине карата шарттуу максимумга (шарттуу минимумга) ээ болот деп айтабыз.*



42-чийме

М и с а л ы, $Z = f(x, y) = x^2 + y^2$ функциясы $x + y = 1$ байланыш теңдемесине карата $f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1$ бир аргументтүү функция болгондуктан анын экстремуму $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ чекитинде болот (42-чийме).

Эгерде (93) байланыш теңдемелеринен m өзгөрмөлөрдү x_i калган $n-m$ өзгөрүлмөлөр аркылуу туюндура алсак, аларды берилген $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясына коюп, $n-m$ аргументтүү функцияны алабыз. Бул функциянын экстремумун көп аргументтүү функциянын экстремуму сыяктуу эле түздөн түз таба алабыз. Көпчүлүк учурларда (93) байланыш теңдемелеринен m өзгөрүлмөлөрдү калгандары менен туюндурууга мүмкүн болбойт. Ошондуктан шарттуу экстремумду түздөн-түз табуу кыйын. Бул учурда Лагранждын көбөйтүүчүлөр ыкмасын колдонуу ыңгайлуу.

Ал үчүн, Лагранждын функциясы деп аталуучу $n+m$ өзгөрмөлүү функцияны карайлы.

$$L(x, \lambda)=f(x)+\lambda_1 f_1(x)+ \ldots +\lambda_m f_m(x),$$

мында $x \in G$ ал эми $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^m$ сандары Лагранждын көбөйтүүчүлөрү деп аталат.

7-аныктама. *Эгерде* $(x^0, \lambda^0)=(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$ *чекитинде*

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0, \lambda^0)=0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x^0, \lambda^0)=f_1(x^0)=0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(x^0, \lambda^0)=f(x^0)=0 \qquad (94)$$

барабардыктары орун алса, анда (x^0, λ^0) *Лагранждын функциясынын туруктуу (стационардык) чекити деп аталат.*

6-теорема. (Шарттуу экстремумдун жетиштүү шарты.) *Берилген* $y_j=f_j(x)$, $j=1, \ldots, m$ *функциялары* $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ *чекитинин аймагында экинчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болуп, ошол* x^0 *чекитинде алар үчүн болгон Якобиандын матрицасынын*

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}=\left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\|, \; j=1, \ldots, m; \; i=1, \ldots, n$$

рангы m *ге барабар жана* $(x^0, \lambda^0)=(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$

○ $L(x, \lambda)$ Лагранждын функциясынын туруктуу чекити болсун, анда ошол Лагранждын функциясынын экинчи дифференциалы

$$d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0) = \sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_\kappa \partial x_j}dx_\kappa dx_j \qquad (95)$$

оң аныкталган квадраттык форма болсо, x^0 чекити (93) байланыш теңдемелерине карата $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясынын минимумдук чекити болот, ал эми $d^2_{xx}L(x^0, \lambda^0)$ терс аныкталган квадраттык форма болсо, x^0 чекити (93) байланыш теңдемелерине карата $f(x)$ функциясынын максимумдук чекити болот. ●

Мисалы, $Z = f(x, y) = e^{xy}$ функциясынын $f_1(x, y) = = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0$ байланыш теңдемесине карата шарттуу экстремумун табуу талап кылынсын.

△ Лагранждын функциясы төмөнкүчө болот:

$$L(x, y) = e^{xy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4).$$

Анда анын туруктуу чекиттери төмөнкү теңдемелердин системасынан аныктайбыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= ye^{xy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xe^{xy} + \lambda(3x^2 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0. \end{aligned} \qquad (96)$$

Биринчи теңдемени x ке, экинчисин y ке көбөйтүп, анан кемитсек:

$$\lambda(3x^3 - 3y^3 + x - y) = \lambda(x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1) = 0. \qquad (97)$$

Эгерде $\lambda = 0$ болсо, (96) системасынын биринчи эки теңдемесинен $x = y = 0$ болот. Бирок $x = y = 0$ байланыш теңдемесин канааттандырбайт, ошондуктан $\lambda \neq 0$ жана (97) ден $x = y$ болушу керек (анткени экинчи көбөйтүүчү дайыма $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 > 0$). Демек, $x = y$ ти байланыш теңдемесине коюп $x^3 + x = 2$, $x = y = 1$ алабыз. Ал эми (96) системанын биринчи теңдемелеринен $x = y$ болгондо $\lambda = -\frac{e}{4}$ болот. Ошентип, $\left(1,\ 1,\ -\frac{e}{4}\right)$ Лагранждын функциясынын жалгыз туруктуу чекити.

Эми шарттуу экстремумдун жетиштүү шартын (6-теорема) колдонсок:

$$d(e^{xy}) = (xdy + ydx)e^{xy},$$

$$d^2(e^{xy}) = (xdy + ydx)^2 e^{xy} + 2dxdye^{xy},$$

$$d^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6xdx^2 + 6ydy^2.$$

Анда $\lambda = -\frac{e}{4}$ жана $x = y = 1$ болгондо Лагранждын функциясынын экинчи дифференциалы:

$$d^2L\left(1,\ 1, -\frac{e}{4}\right) = e[(dx + dy)^2 + 2dxdy - \frac{3}{2}(dx^2 + dy^2)]. \quad (98)$$

Байланыш теңдемени дифференцирлеп, $x = y = 1$ десек $dy = -dx$ болот. Муну (98) дин оң жагына коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$d^2L\left(1,\ 1, -\frac{e}{4}\right) = -5edx^2 < 0.$$

Ошентип, $f(x, y) = e^{xy}$ функциясы, байланыш $x^3 + y^3 + x + y = 4$ теңдемесине карата (1,1) чекитинде шарттуу минимумга ээ болот экен. ▲

Көнүгүүлөр

1. Берилген функциялардын аныкталуу областын тапкыла жана тегиздиктеги чиймесин чийгиле:

а) $u=\sqrt{(x-2)(1-y)}$; б) $u=ln\frac{1-x}{3-y}$;

в) $u=sin(x^2+y^2)$; г) $u=arcsin\frac{x}{2}+arccos\frac{y}{2}$;

д) $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; е) $u=ln(y-x^2)$.

2. Төмөнкү функциялардын аныкталуу областын тапкыла:

а) $u=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$; б) $u=\sqrt{1+x}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z}$;

в) $u=\sqrt{x}+\sqrt{yz}$; г) $u=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-1}}$.

3. Берилген функциялардын үзгүлтүксүз чекиттерин тапкыла:

а) $u=\frac{xy-3}{x^2+y^2}$; б) $u=\frac{5x-3y}{x^2-y}$;

в) $u=\frac{3y}{x-y^2}$; г) $u=\frac{2+x-y}{x^3+y}$

4. Төмөнкү функциялардын d^3u үчүнчү дифференциалын тапкыла:

а) $u=5x^2-4x^3$; б) $u=x^3y^2z$;

в) $u=x^5+6xy^3+4z^2$; г) $u=cos(x+y+z)$.

5. $u=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ функциясынын берилген багыты $e=a_1e_1+a_2e_2+\ \ldots\ +a_ne_n$ боюнча туундусун тапкыла:

а) $u=6xy^3+5x^2$, $e=e_1+3e_2$;

б) $u=x^2yz$, $e=e_1+2e_2+3e_3$

19*

6. Берилген функциялардын координаттык башталышындагы Тейлордун формуласы боюнча ажыралышынын биринчи үч мүчөсүн жазгыла:

а) $u = e^{2x}\sin 3y$; б) $u = x^3y^2z$.

7. Төмөнкү функциялардын ылайыктуу экстремумдарын тапкыла:

а) $u = -x^2 - xy - y^2 + x + y$; б) $u = x^3 + y^3 - 3xy$;

в) $u = x^3y^2(5 - x - y)$; г) $u = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

$(x > 0,\ y > 0)$.

8. Айкын эмес функциянын туундусун тапкыла.

а) $xe^y - y + 1 = 0$; б) $x + arctgy - y = 0$.

9. z функциясынын берилген байланыш теңдемелерине карата шарттуу экстремумун тапкыла:

а) $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $x^2 + y^2 = 1$; б) $z = x^2 + y^2$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

VI ГЛАВА

АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

§1. АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАМАСЫ ЖАНА КАСИЕТТЕРИ. ИНТЕГРАЛДООНУН НЕГИЗГИ ЫКМАЛАРЫ

Биз мурда, материалдык чекиттин $s = f(t)$ кыймыл закону боюнча убакыттын t моментиндеги ылдамдыгын табуу маселеси, б.а. $V = s' = f'(t)$ туундусун табууга же дифференциалдык эсептөөлөрдүн негизги маселеси, берилген функция боюнча анын туундусун аныктоо экендигине көңүл бурганбыз (IV гл. §1).

Физикада тескери маселе да кездешет: берилген $V = f(t)$ ылдамдыгы боюнча материалдык чекиттин $s = F(t)$ кыймыл законун аныктоо, б.а. туундусу $V = f(t)$ болгон $s = F(t)$ функциясын табуу.

1. Баштапкы функция.

Бизге E — чектүү же чексиз сан огунун аралыгы (интервал, жарым интервал же сегмент) берилип, анда $f(x)$ жана $F(x)$ функциялары аныкталсын.

Аныктама. *Эгерде $F(x)$ функциясы E де туундуга ээ болсо жана $\forall x \in E$ үчүн төмөнкү барабардыгы аткарылса,*

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

анда $F(x)$ функциясын $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы деп атайбыз.

Мисалдар. а) $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ функциясы $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясынын баштапкы функциясы, анткени $\forall x \in]-1, +1[$ үчүн $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $f(x)=cosx$ функциясынын баштапкы функциясы $F(x)=sinx$ болот, анткени $\forall x \in]-\infty;\ +\infty[$ үчүн $(sinx)'=cosx$;

в) $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясы үчүн $F(x)=lnx$ функциясы баштапкы функция, анткени $\forall x \in]0;\ +\infty[$ үчүн $(lnx)'=\frac{1}{x}$.

Эгерде $F(x)$ функциясы $\forall x \in E$ үчүн $f(x)$ функциясына баштапкы функция болсо, анда $F(x)+C$, $(C{-}const.)$ функциясы да сөзсүз $f(x)$ функциясынын баштапкы функциясы боло алат. Ошентип, бизге бир эле функциянын баштапкы функциялары бири-бири менен кандай байланышта болот деген суроо коюлат.

Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы E көптүгүндө каалагандай эки $F_1(x)$ жана $F_2(x)$ баштапкы функцияларга ээ болсо, анда $\forall x \in E$ үчүн*

$$F_2(x)=F_1(x)+C \tag{2}$$

барабардыгы аткарылат (C — каалагандай турактуу чоңдук). Башка сөз менен, бир эле функциянын баштапкы эки функциялары бири-биринен турактуу чоңдукка айырмаланышат.

○ Биз $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)$ айырмасын белгилейли. Баштапкы функциянын аныктамасы боюнча жана теореманын шарты боюнча $\forall x \in E$ үчүн

$$F_2'(x)=f(x),\ F_1'(x)=f(x)$$

аткарылгандыктан $\Phi(x)$ функция E де дифференцияланууучу функция жана $\forall x \in E$ үчүн

$$\Phi'(x)=0.$$

Анда Лагранждын теоремасындагы натыйжа боюнча $\forall x \in E$ үчүн $\Phi(x)=C$ же $F_2(x)-F_1(x)=C$, б.а. (2) барабардык аткарылды. ●

Ошентип берилген $f(x)$ функциясы үчүн, анын баштапкы функциясын турактуу чоңдук тактыгында бир маанилүү эмес аныктай алабыз. Ал эми баштапкы функциялардын көптүгүнөн кандайдыр бир $F_1(x)$ баштапкы функцияны бөлүп алгыбыз келсе, $M_0(x_0, y_0)$ чекитинин $y = F_1(x)$ функциясынын графигинде жата тургандыгын көргөзүү жетиштүү.

Мисалы. 1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциясынын графиги (1,2) чекити аркылуу өткөн бир гана баштапкы функциясын аныктагыла.

△ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функиясынын баштапкы функцияларынын көптүгү

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

формуласы аркылуу берилет. Шарт боюнча $F_1(1) = 2$, анда $2 = -1 + C$, мындан $C = 3$. Демек, $F_1(x) = 3 - \frac{1}{x}$. ▲

2. Анык эмес интегралдын аныктамасы.

Аныктама. *Биз, $f(x)$ функциясынын E көптүгүндөгү бардык баштапкы функцияларынын жыйындысын $f(x)$ функциясынын E деги анык эмес интегралы деп атайбыз да аны $\int f(x)dx$ символу менен белгилеп, төмөнкү түрүндө жазабыз:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (3)$$

Мында $F(x)$ функциясы E деги $f(x)$ тин баштапкы функцияларынын бири, $\int$ *— анык эмес интеграл белгиси, $f(x)$ — интеграл алдындагы функция, $f(x)dx$ — интеграл алдындагы туюнтма, x — интегралдоо өзгөрүлмө чоңдугу, C — каалагандай турактуу чоңдук.* Ал C чоңдугу ачык аныкталган эмес, ар кандай мааниге ээ боло алат, ошол себептүү (3) түн анык эмес интеграл деп аталышы мына ушуга байланыштуу.

Интеграл алдындагы туюнтманы $F'(x)dx$ же $dF(x)$ же болбосо

$$f(x) = dF(x) \tag{4}$$

түрүндө да жазууга болот.

Берилген функциянын анык эмес интегралын аныктоо амалы дифференциялоо амалына тескери болуп, аны интегралдоо деп атайбыз. Ошондуктан туундунун каалаган формуласын же болбосо $F'(x) = f(x)$ формуласын (3) формула түрүндө жазууга болот. Алсак, $(sinx)' = cosx$ формуласынан $\int cosxdx = sinx + C$ келип чыгат.

3. Анык эмес интегралдын касиеттери.

1^0. $$d(\int f(x)dx) = f(x)dx. \tag{5}$$

Бул (3) формуладан, $dC = 0$ экендигин эске алсак, $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx$ келип чыгат.

Мындан дифференциал белгиси интеграл белгисинен мурда келсе, алар кыскарылып интеграл алдындагы туюнтманы алабыз десек болот.

2^0. $$\int dF(x) = F(x) + C \text{ же } \int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{6}$$

Бул (6) барабардык (3) жана (4) барабардыктардан келип чыгат.

Ал эми (6) барабардыкты, дифференциал белги интеграл белгиден кийин келсе да алар кыскарышып калган функцияга C чоңдугун кошобуз деп билсек болот.

3^0. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары E де баштапкы функцияларга ээ болсо, анда ар кандай $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$ үчүн $(\alpha \cdot \beta \neq 0)$ $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ функциясы дагы ошол эле E де баштапкы функцияга ээ болот жана

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x) \tag{7}$$

барабардыгы орун алат.

$f(x)$ жана $g(x)$ функциялары үчүн $F(x)$ жана $G(x)$ баштапкы функциялар болсо, анда $\Phi(x)=\alpha F(x)+\beta G(x)$ дагы $\varphi(x)$ тин баштапкы функциясы болот. Анткени,

$$(\alpha F(x)+\beta G(x))'=\alpha f(x)+\beta g(x)=\varphi(x).$$

Интегралдын аныктамасы боюнча (7) барабардыктын сол жагы $\Phi(x)+C$ түрүндөгү, ал эми он жагы $\alpha F(x)+\alpha C_1+\beta G(x)+$ $+\beta C_2=\Phi(x)+\alpha C_1+\beta C_2$ түрүндөгү функциялардан турат. Шарт боюнча $\alpha\cdot\beta\neq 0$ болгондуктан ар бир $\Phi(x)+C$ функциялар $\Phi(x)+\alpha C_1+\beta C_2$ функцияларынын көптүгүнө кирет жана тескерисинче айтсак да болот, же болбосо, берилген C чондугун C_1 жана C_2 чондуктары боюнча аныктоого, же берилген C_1 жана C_2 лер аркылуу $C=\alpha C_1+\beta C_2$ орун алгандай C чондугун аныктоого болот.

Ошентип, интегралдоо сызыктуу касиетке ээ: *каралган функциялардын сызыктуу комбинацияларынын интегралы интегралдардын сызыктуу комбинацияларына барабар.*

Мисалы. 2. $\int f(x)dx$ интегралын а) $f(x)=e^x+x^2$; б) $f(x)=$ $=-2\sin x+\dfrac{3}{1+x^2}$ учурлар үчүн эсептегиле.

△ а) Туундунун таблицасын жана 3-касиетти пайдаланып

$$\int(e^x+x^2)dx=e^x+\frac{x^3}{3}+C;$$

б) $(-\cos x)'=\sin x$, $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ болгондуктан

$$\int\left(-2\sin+\frac{3}{1+x^2}\right)dx=2\cos x+3arctgx+C$$

маанилерине ээ болобуз. ▲

Мындан ары, татаал функциялардан туунду алууну жана көбөйтүндүнүн туундусу жөнүндөгү эрежелерди пайдаланып, интегралы элементардык функциялар аркылуу туюнтулуучу функциялардын көптүктөрүн кеңейтүүгө болот.

4. Өзгөрүлмө чоңдукту алмаштыруу (алмаштыруу ыкмасы)

Бизге $t = \varphi(x)$ функциясы Δ аралыгында аныкталып жана дифференцияланууч болуп жана $\tilde{\Delta} = \varphi(\Delta)$, $\varphi(x)$ функциясынын Δ дагы маанилеринин көптүгү болсун.

Эгерде $U(t)$ функциясы $\tilde{\Delta}$ да аныкталып жана дифференцияланууч болуп, жана

$$U(t) = u(t) \tag{8}$$

барабардыгы аткарылса, анда Δ аралыгында $F(x) = U(\varphi(x))$ татаал функциясы аныкталат жана дифференцияланууч функция болот жана да

$$F'(x) = [U(\varphi(x))]' = U'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \tag{9}$$

орун алат. Ал эми (8) жана (9) дан, эгерде $U(t)$ функциясы $u(t)$ нын баштапкы функциясы болсо, анда $u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ функциясынын баштапкы функциясы $U(\varphi(x))$ болот. Бул, эгерде

$$\int u(t)dt = U(t) + C \tag{10}$$

аткарылса, анда

$$\int u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = U(\varphi(x)) + C \tag{11}$$

же

$$\int u(\varphi(x))d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C \tag{12}$$

орун аларын билгизет. (12) же (11) формула *өзгөрүлмө чоңдукту алмаштырып интегралдоо формуласы* деп аталат. Алар (10) формуладан t нын ордуна дифференцияланууч $\varphi(x)$ функциясын коюу жолу менен алынат.

Алынган (12) формуланын негизги айрым учурларына токтололу:

а) $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн баштапкы функция болсо, б.а.

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ анда } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \tag{13}$$

орун алат. Мында $\varphi(x) = ax + b$, $f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b)$.

б) Биз $\int \frac{dt}{t} = ln|t| + C$ колдонуп,

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = ln|\varphi(x)| + C, \ (\varphi(x) \neq 0) \qquad (14)$$

формуласын алабыз.

в) $\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1, \ t > 0$ болсо, анда

$$\int (\varphi(x))^{\alpha} \alpha'(x)dx = \int (\varphi(x))^{\alpha} d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \varphi(x) > 0,$$

$$\alpha \neq -1 \qquad (15)$$

(13) — (14) формулаларга мисалдар келтирели:

3. $\int (2x+3)^6 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^6 d(2x+3) = \frac{(2x+3)^7}{14} + C.$

4. $\int \frac{dx}{(x+a)^{\kappa}} = ln|x+a| + C_1, \ (\kappa = 1); \ \frac{(x+a)^{\kappa+1}}{1-\kappa} + C, \ (\kappa \neq 1).$

5. $\int \frac{xdx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+\alpha)}{x^2+\alpha} = \frac{1}{2}ln|x^2+\alpha| + C.$

6. $\int ctgxdx = \int \frac{d(sinx)}{sinx} = ln(sinx) + C.$

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{d(x^2+\alpha)}{2\sqrt{x^2+\alpha}} = \sqrt{x^2+\alpha} + C.$

8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \ a \neq 0.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \ a > 0.$

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0.$

11. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}, \ \alpha \neq 0$

△ эгерде $x+\sqrt{x^2+\alpha}=t=t(x)$ десек, анда

$$dt=t'(x)dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx=\frac{t(x)}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx,$$

мындан

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Демек, $J=\int\frac{dt(x)}{t(x)}=ln|t(x)|+C=ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C,$ б.а.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$ ▲

Туундунун таблицаларын колдонуп, интегралдардын таблицасын түзөбүз. Ал таблицага 8 — 11-мисалдагы интегралдар да кошулат.

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1.$

2. $\int\frac{dx}{x+\alpha}=ln|x+\alpha|+C.$

3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{lna}+C,\ a>0,\ a\neq1.\ \int e^x dx=e$

4. $\int sinxdx=-cosx+C.$

5. $\int cosxdx=sinx+C.$

6. $\int\frac{dx}{cos^2x}=tgx+C.$

7. $\int\frac{dx}{sin^2x}=-ctgx+C.$

8. $\int shxdx=chx+C.$

9. $\int chxdx=shx+C.$

10. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

11. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \ a > 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C, \ a > 0.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \ a \neq 0.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + C, \ \alpha \neq 0.$

Мисалдар. 12. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}.$

$\triangle$ мында $x(1 - x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$ болгондуктан, $a = \frac{1}{2}$ учурунда 9-мисалды (13-таблицаны) колдонуп, $J = \int \frac{d(x - 1/2)}{\sqrt{(1/2)^2 - (x - 1/2)^2}} = arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C$ же болбосо $J = arcsin(2x - 1) + C$, маанисине ээ болобуз. ▲

13. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}.$

$\triangle$ $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{11}{4}$ болгондуктан, 11-мисалды (15-таблицаны) колдонуп,

$$J = \int \frac{d(x - 3/2)}{\sqrt{(x - 3/2)^2 + \frac{11}{4}}} = \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 5} \right| + C$$

баштапкы функцияга ээ болобуз. ▲

Көпчүлүк учурда

$$J = \int f(x)dx \tag{16}$$

интегралын чыгарууда жаңы өзгөрүлмө чоңдукка өтүү ыңгайлуу.

Эгерде $x = \varphi(t)$ кандайдыр бир аралыкта монотондуу жана дифференцияланууучу функция болсо, анда ал

$$t = \omega(x) \tag{17}$$

тескери функциясына ээ болот. Ушул учурда (16) интегралдын алдындагы туюнтманы $x = \varphi(t)$ алмаштыруусу аркылуу өзгөртүп $f(x)dx = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ барабардыгын алабыз жана $u(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ белгилесек төмөнкүгө келебиз:

$$\int u(t)dt = U(t) + C. \tag{18}$$

Анда (16) — (18) формуладан

$$J = \int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + C = U(\omega(x)) + C \tag{19}$$

келип чыгат. Бул (19) формуланы алмаштыруу аркылуу же ордуна коюу ыкмасы менен интегралдоо формуласы деп атайбыз. Ушул формула менен (16) интегралды эсептөө үчүн, тескери функциясы болгон жана дифференцияланууучу $x = \varphi(t)$ алмаштыруусун аныктап, интеграл алдындагы $f(x)dx$ ти $u(t)dt$ түрүнө келтирүү жетиштүү, бирок $u(t)$ га баштапкы функция белгилүү болуш керек.

Мисалы. 14. $J = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $a > 0$, интегралын эсептегиле.

$\triangle$ Интеграл алдындагы функция $[-a,\ a]$ аралыгында аныкталган. Эми $x = \varphi(t) = a\sin t$ алмаштыруусун алсак, анда $t = \omega(x) = \arcsin\frac{x}{a}$ болгондуктан $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$, $t \in [-\pi/2;\ \pi/2]$, $a > 0$.

Ошондуктан,

$$J = \int a\cos t\ a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int(1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Эми $sin\ t = \frac{x}{a}$, $cost = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$ болгондуктан $\frac{1}{2}sin2t =$

$= sintcost = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$ болот.

Демек, $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$ ▲

5. Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы

Эгерде бизге Δ аралыгында үзгүлтүксүз туундуга ээ болуучу $u(x)$ жана $\upsilon(x)$ функциялары берилсе, анда $u\upsilon$ функциясы да Δ аралыгында үзгүлтүксүз туундуга ээ болот жана көбөйтүндүдөн туунду алуу эрежесин пайдалансак

$$u\upsilon' = (u\upsilon)' - \upsilon u'$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыкты интегралдап жана

$$\int (u\upsilon)'dx = u\upsilon + C$$

эске алып

$$\int u\upsilon'dx = u\upsilon + C - \int \upsilon u'dx$$

барабардыгын алабыз. Турактуу C чоңдугун $\int \upsilon u'dx$ интегралына таандык кылып, биз

$$\int u\upsilon'dx = u\upsilon - \int \upsilon u'dx \qquad (20)$$

же

$$\int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du \qquad (21)$$

формуласына келебиз. Бул (20) же (21) формуланы *бөлүктөп интегралдоо формуласы деп атайбыз.* Ал $\int ud\upsilon$ интегралын эсептөөнү $\int \upsilon du$ интегралын эсептөөгө келтирет.

Мисалы. 15.

$$\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

16. $J = \int \sqrt{x^2 + \alpha}\, dx$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ Мында $u = \sqrt{x^2 + \alpha}$, $\upsilon = x$ деп белгилеп, (20) формула боюнча

$$J = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx$$

алабыз. Ал эми $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \int \frac{x^2 + \alpha - \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = J - \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$ экендигин эске алсак, анда биз J ге карата

$$J = x\sqrt{x^2 + \alpha} - J + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$$

теңдемесине ээ болобуз. Мындан жана 15-таблицаны эске алып

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$$

мааниге ээ болобуз. ▲

17. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

интегралын эсептегиле. Ал үчүн, J_n интегралын чыгаруудагы рекуренттик формуланы далилдейбиз.

$\triangle$ Эгерде $u = (x^2 + a^2)^{-n}$, $\upsilon = x$ десек, анда $u' = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1}$, $\upsilon' = 1$ болот да жана (20) формуласы боюнча

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

барабардыгына ээ болуп, мындан

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = J_n - a^2 J_{n+1}$$

экендигин эске алсак

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$$

тендемесине ээ болобуз. Мындан, биз

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n \qquad (22)$$

рекуренттик формуласын алабыз. ▲

Эскертүү. 1) Эгерде $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ эске алсак, анда (22) формуладан $J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, интегралынын маанисине ээ болобуз. Ушундай эле J_3, J_4, J_5 ж.б. маанилерди эсептөөгө болот.

2) Эгерде биз $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$ үзгүлтүксүз туундулар аныкталат деп, (20) формуланы кайталап колдонуп, бөлүктөп интегралдоонун кеңейтилген

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v dx \quad (23)$$

формуласын алсак болот. Чынында эле $n=1$ болсо

$$\int uv''dx = uv' - u'v + \int u''vdx \qquad (24)$$

формуласына ээ болобуз.

Мисалы. 18. $J = \int x^2 e^x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Мында биз $u = x^2$, $v = e^x$ белгилеп жана $u' = 2x$, $u'' = 2$, $v' = v'' = e^x$ экендигин эске алып (24) формула боюнча

$$J = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

ээ болобуз. Анда

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x - 2)e^x + C$$

болот. ▲

19. $J = \int e^{\alpha x} \cos\beta x dx$, $\alpha\beta \neq 0$ интегралын эсептегиле.

△ Эгерде $u = \cos\beta x$, $v = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}$ белгилөөсүн алып, $u' = -\beta\sin\beta x$, $u'' = -\beta^2\cos\beta x$, $v' = e^{\alpha x}/\alpha$, $v'' = e^{\alpha x}$ эсептеп, (24) формула боюнча

$$J=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}sin\beta-\frac{\beta^2}{\alpha^2}J+C$$

барабардыгына ээ болуп, мындан

$$J=\frac{\alpha cos\beta x+\beta sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\cdot e^{\alpha x}+C$$

мааниге ээ болобуз. ▲

20. $J=\int x^2 lnxdx$ интегралын эсептегиле.

△ Биз $u=lnx$, $\upsilon=\frac{x^4}{12}$ белгилөөсүн жүргүзүп, $u'=\frac{1}{x}$, $u''=-\frac{1}{x^2}$, $\upsilon'=\frac{x^3}{3}$, $\upsilon''=x^2$ барабардыктарын эске алып, (24) формуланы колдонсок, анда

$$J=\frac{x^3}{3}lnx-\frac{x^3}{9}+C$$

маанисин алабыз. ▲

§ 2. РАЦИОНАЛДЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЖӨНӨКӨЙ БӨЛЧӨКТӨРГӨ АЖЫРАТУУ

1. Көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.

а) Көп мүчөлөрдүн тамырлары. Бизге n-даражадагы

$$Q_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +c_1x+c_0,\ (c_n\neq 0) \tag{1}$$

көп мүчөсү берилсин. Көп мүчөнүн коэффициенттери c_n, c_{n-1}, ..., c_0 чыныгы, ошондой эле комплекстүү сандар болушу мүмкүн, ал эми x өзгөрүлмө чоңдугу R же C көптүгүнөн каалагандай мааниге ээ боло алат.

Эгерде $Q_n(a)=0$ барабардыгы орун алса, анда $x=a$ саны $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры деп аталат.

Мисалы, x^3-3x^2+2 көп мүчөсүнүн тамыры $x=1$, x^2+1 көп мүчөсүнүн тамыры $x=i$.

Эми биз $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн $x-a$ эки мүчөгө бөлүнүшү жөнүндөгү суроого токтололу. $Q_n(x)$ көп мүчөсүн $x-a$ (a — берилген сан) эки мүчөсүнө бөлүү, аныктама боюнча, ал көп мүчөнү

$$Q_n(x)=(x-a)\bar{Q}_{n-1}(x)+r \tag{2}$$

түрүндө жазууга эквиваленттүү. Мында $\bar{Q}_{n-1}(x)$ көп мүчөсү $n-1$ даражада, r – кандайдыр бир сан, аны көп мүчөнү $x-a$ га бөлгөндөгү калдык деп атайбыз. Ал эми (2) барабардык $\forall x\in \mathbb{R} (\forall x\in C)$ маанилеринде орун алат. Эгерде $r=0$ болсо, анда көп мүчө эки мүчөгө калдыксыз бөлүнөт дешет.

1-теорема. (**Безунун**). *Эгерде $Q_n(x)$ көп мүчөсү $x-a$ га калдыксыз бөлүнсө, б.а.*

$$Q_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x) \tag{3}$$

барабардыгы орун алса, анда a саны сөзсүз $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры болот.

○ Биз $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры $x=a$ саны болсун дейли, б.а. $Q_n(a)=0$ анда биринчиден, $x=a$ ны (2) формулага койсок $r=Q_n(a)$ ээ болуп, мындан $r=0$ келип чыгат, б.а. эгерде a — саны көп мүчөнүн тамыры болсо $Q_n(x)$ көп мүчөсү $x-a$ га калдыксыз бөлүнөт.

Экинчиден, эгерде көп мүчө $x-a$ га калдыксыз бөлүнсө, б.а. (3) барабардык орун алса, анда ал барабардыктан $Q_n(a)=0$ экендиги келип чыгат.

Демек, $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры $x=a$ саны болот.

Эми биз эселүү тамырга түшүнүк берели. Эгерде $\kappa\in \mathbb{N}$ саны жана $Q^*_n(x)$ көп мүчөсү $\forall x\in \mathbb{R}$, $(\forall x\in C)$ маанилеринде

$$Q_n(x)=(x-a)^{\kappa}Q^*_{n-\kappa}(x), \tag{4}$$

$$Q^*_{n-\kappa}(a)\neq 0 \tag{5}$$

барабардыгы орун алгыдай болуп аныкталса, анда $x=a$ саны $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн κ эселүү тамыры деп аталат. ●

б) **Чыныгы коэффициенттүү көп мүчө.** Чыныгы коэффициенттүү экинчи даражадагы көп мүчөнү (квадраттык үч мүчөнү) карайлы:

$$Q_n(x) = x^2 + px + q.$$

Эгерде дискриминаттын терс, б.а.

$$D = p^2 - 4q < 0$$

болсун десек, анда $Q(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - i\left(-\frac{D}{4}\right)$

же

$$Q(x) = \left(x + \frac{p}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)\left(x + \frac{p}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)$$

түрүндө жазылат. Мындан $Q(x)$ көп мүчөсү түйүндөш комплекстүү

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

тамырларга ээ болот да башка тамырга ээ болбойт.

Бул корутунду каалаган даражадагы $n(n \geq 2)$ чыныгы коэффициенттүү көп мүчөлөргө да тиешелүү, б.а. төмөнкү теорема орун алат.

2-теорема. *Эгерде $x_0 = \gamma + i\delta$ $(\delta \neq 0)$ саны чыныгы коэффициенттүү $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн чыныгы эмес тамыры болсо, анда $\overline{x} = \gamma - i\delta$ саны дагы ошол эле көп мүчөнүн тамыры болот.*

○ Шарт боюнча $Q_n(x_0) = 0$, б.а.

$$c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \ \dots \ + c_1 x_0 + c_0 = 0,$$

мындан $\overline{Q_n(x_0)} = 0$, келип чыгат, же

$$\overline{c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \ \dots \ + c_1 x_0 + c_0} = 0. \qquad (6)$$

Түйүндөш сандардын касиетин колдонуп (6) барабардыкты

$$\overline{c}_n \overline{x}_0^n + \overline{c}_{n-1} \overline{x}_0^{n-1} + \ \dots \ + \overline{c}_1 \overline{x}_0 + \overline{c}_0 = 0,$$

же

$$c_n(\bar{x}_0)^n + c_{n-1}(\bar{x}_0)^{n-1} + \ \dots \ + c_1\bar{x}_0 + c_0 = 0 \tag{7}$$

деп жаза алабыз ($Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн бардык коэффициенттери чыныгы сандар болгондуктан $\bar{c}_\kappa = c_\kappa$ $(\kappa = \overline{0,n})$). Ал эми (7) барабардыкты

$$Q_n(\bar{x}_0) = 0$$

түтүндө жазсак болот. Бул болсо $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры $\bar{x}_0$ саны экендигин көрсөтөт. ●

Жогорудагы биринчи жана экинчи теоремалар $Q_n(x)$ көп мүчөсү тамырга ээ болгон учурда далилденди. Ал эми көп мүчөнүн тамырларынын болушу жөнүндө төмөнкү теореманы келтирели.

в) **Алгебранын негизги теоремасы.**

3-теорема. *Ар кандай $n \geqslant 1$ даражадагы чыныгы же комплекстик коэффициенттүү көп мүчөлөр жок дегенде бир тамырга ээ болот.*

Бул теорема алгебранын негизги теоремасы деп аталып, алгебра курсунда далилденет.

Биз n-даражадагы $Q_n(x)$ көп мүчөсүн алып, тамыры x_1 болсун дейли. Анда бул көп мүчөнү

$$Q_n(x) = (x - x_1)\overline{Q}_{n-1}(x)$$

түрүндө жазабыз. $\overline{Q}_{n-1}(x)$ көп мүчөсүнүн даражасы $n-1$.

Эми $\overline{Q}_{n-1}(x)$ көп мүчөсүнө биринчи жана үчүнчү теореманы колдонуп

$$Q_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\overline{Q}_{n-1}(x)$$

түрүндө уланып индукция закону боюнча

$$Q_n(x) = C_n(x - x_1)(x - x_2) \ \dots \ (x - x_n) \tag{8}$$

сыяктуу жазсак болот. Мында C_n болсо $Q_n(x)$ көп мүчөнүн x^n мүчөсүнүн коэффициенти, $x_1, x_2, \dots, x_n$ көп мүчөсүнүн тамырлары, булардын ичинен барабар тамырлар да болушу мүмкүн.

г) **Чыныгы коэффициенттүү көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.** Эгерде чыныгы коэффициенттүү n-даражадагы $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн

κ — эселүү тамыры $x = a$ саны болсо, анда (4) барабардык орун алат. $Q^{*}_{n-\kappa}(x)$ чыныгы коэффициенттүү $n-\kappa$ даражадагы көп мүчө жана бул көп мүчөгө $x = a$ саны тамыр боло албайт.

Эми $x_0 = \gamma + i\delta$, $(\delta \neq 0)$ саны $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн чыныгы эмес тамыры болсо, анда $\overline{x}_0 = \gamma - i\delta$ саны ошол эле көп мүчөнүн тамыры боло алат (2-теорема), жана ошол үчүн (8) дин оң жагына $(x - x_0)$ жана $(x - \overline{x}_0)$ көбөйтүүчүлөр кирет да көбөйтүндүсү

$$(x - x_0)(x - \overline{x}_0) = (x - \gamma - i\delta)(x - \gamma + i\delta) = (x - \gamma)^2 + \delta^2 = x^2 + px + q,$$

$$(p = 2\gamma,\ q = \gamma^2 + \delta^2,\ p^2 - 4q = -4\delta^2 < 0)$$

барабар болот. Демек, бул учурда $Q_n(x)$ көп мүчө, дискрименанты терс $(p^2 - 4q < 0)$ чыныгы коэффициенттүү квадраттык үч $x^2 + px + q$ мүчөгө бөлүнөт. Бул болсо чыныгы коэффициенттүү $Q_{n-2}(x)$ көп мүчө аныктала тургандыгын жана

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)\overline{Q}_{n-2}(x)$$

барабардыгы орун алышын көрсөтөт.

Эгерде, $x_0 = \gamma + i\delta$, $(\delta \neq 0)$ саны $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн s эселүү тамыры болсо, анда $\overline{x}_0$ саны дагы ошол эле көп мүчөнүн s эселүү тамыры болот жана ал $Q_n(x)$ көп мүчөнү

$$Q_n(x) = (x - x_0)^s (x - \overline{x}_0)^s \overline{Q}_{n-2s}(x)$$

же

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s Q_{n-2s}(x) \tag{9}$$

түрүндө жазабыз. Мында p, q чыныгы сандар, $p^2 - 4q < 0$ ал эми $\overline{Q}_{n-2s}(x)$ көп мүчөсү $n - 2s$ даражадагы чыныгы коэффициенттүү жана x_0, $\overline{x}_0$ сандар ал көп мүчөнүн тамыры болбойт, б.а.

$$Q_{n-2s}(x_0) \neq 0,\ \overline{Q}_{n-2s}(\overline{x}_0) \neq 0. \tag{10}$$

$Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн $a_1, a_2, ..., a_n$ сандары ирети менен $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ эселүү чыныгы тамырлары болсун. Анда (8) барабардык

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ ... \ (x - a_\kappa)^{\alpha_\kappa} R(x)$$

түрүндө жазылат. $R(x)$ чыныгы коэффициенттүү көп мүчө даражасы $l = n - \sum_{m-1}^{n} \alpha_m$ болот жана чыныгы тамырга ээ эмес.

Эгерде $R(x)$ нөлүнчү эмес көп мүчө болсо, анда $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн β_j эселүү x_j жана $\bar{x}_j$ комплекстүү түйүндөш тамырларына (8) формуладан $(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j} (p_j^2 - 4q_j < 0)$ көбөйтүндү туура келет. Ошондуктан

$$\begin{gathered} Q_n(x) = c_n (x - a_1)^{\alpha_1} \ ... \ (x - a_\kappa)^{\alpha_\kappa} \times \\ \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ ... \ (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \end{gathered} \tag{11}$$

мында

$$\sum_{m-1}^{\kappa} \alpha_m + 2\sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

Мына, ошентип чыныгы коэффициенттүү $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн бардык чыныгы жана чыныгы эмес тамырларын билип, аны (11) формула сыяктуу көбөйтүүчүлөргө ажыратууга болот (c_n, a_1, ..., a_κ, p, ..., p_s, ..., q_1, ...; q_s чыныгы сандар).

2. Дурус рационалдык бөлчөктөрдү ажыратуу жөнүндө теорема.

Бул пунктта рационалдуу бөлчөк функциясы деп аталуучу

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

түрүндөгү функцияны карайлы, мында $P_m(x)$ жана $Q_n(x)$ көп мүчөлөрүнүн даражалары ирети менен m жана n болсун. Ал эми $m < n$ учурунда бөлчөктү дурус рационалдык бөлчөк деп атайбыз. Бул бөлчөккө катышкан көп мүчөлөрдүн коэффициенттери чыныгы сандар болсун.

1-лемма. *Эгерде* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *— дурус рационалдык бөлчөк болуп жана* $x=a$ *саны* $Q_n(x)$ *көп мүчөсүнүн* $\kappa \geqslant 1$ *эселүү чыныгы тамыры болсо, анда* A *чыныгы саны жана чыныгы коэффициенттүү* $P(x)$ *көп мүчөсү аныкталышып*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^\kappa} + \frac{P(x)}{(x-a)^{\kappa-1} Q^*_{n-\kappa}(x)} \tag{12}$$

барабардыгы орун алат. Мында $Q^*_{n-\kappa}(x)$ *көп мүчөсү* $Q_n(x)$ *ти* $(x-a)^\kappa$ *бөлгөндөгү тийинди. Ушул (12) формуланын оң жагындагы экинчи кошулуучу дурус бөлчөк жана* A *саны* $P(x)$ *көп мүчөсү бир маанилүү аныкталат.*

○ Лемманын шартындагы A санын

$$\varphi(x) = P_m(x) - AQ^*_{n-\kappa}(x) \tag{13}$$

көп мүчөсү $x-a$ эки мүчөгө калдыксыз бөлүнгөндөй кылып аныктайлы. Ал эми (12) жана (13) формуладагы $Q^*_{n-\kappa}(x)$ көп мүчө $Q_n(x)$ ти $(x-a)^\kappa$ га бөлгөндөгү тийинди болгондуктан, ал көп мүчө (4) барабардык жана (5) шарт аркылуу аныкталат. Эми 1-теорема боюнча $\varphi(x)$ көп мүчөсү $x-a$ эки мүчөгө калдыксыз бөлүнүшү үчүн сөзсүз $\varphi(a)=0$ шарты орун алыш керек, б.а.

$$P_m(a) - AQ^*_{n-\kappa}(a) = 0$$

барабардыгы аткарылыш керек. Мындан (5) шартты эске алып төмөнкүгө ээ болобуз:

$$A = \frac{P_m(a)}{Q^*_{n-\kappa}(a)}. \tag{14}$$

Ошентип, A чыныгы саны (14) формула аркылуу бир маанилүү аныкталат.

Демек, A санынын (14) формуланы канааттандырган маанисинде $\varphi(x)$ көп мүчөсү $x-a$ эки мүчөгө калдыксыз бөлүнөт, ошондуктан чыныгы коэффициенттүү бир гана $P(x)$ көп мүчө аныкталып төмөнкү барабардык орун алат:

$$\varphi(x) = (x-a)P(x). \tag{15}$$

Эми (13) жана (15) барабардыктардан

$$P_m(x) - AQ^*_{n-\kappa}(x) = (x-a)P(x) \tag{16}$$

барабардыгы келип чыгат. Бул (16) барабардыктын эки жагын $Q_n(x) = (x-a)^\kappa Q^*_{n-\kappa}(x)$ барабардыгына бөлсөк, анда (12) формула далилденет.

Эгерде $\varphi(x)$ көп мүчөсүнүн даражасы r болсо, анда $r \leqslant max(m,\ n-\kappa)$ $(m < n,\ n-\kappa \leqslant n-1 < n)$. Ошондуктан $r < n$.

Демек, болчок $\dfrac{P(x)}{(x-a)^{\kappa-1}Q^*_{n-\kappa}(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{Q_n(x)}$ дурус болчок. ●

Натыйжа. *Ушул лемманы к ирет колдонсок*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_\kappa}{(x-a)^\kappa} + \frac{A_{\kappa-1}}{(x-a)^{\kappa-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q^*_{n-\kappa}(x)} \tag{17}$$

барабардыгын алабыз, мында $A_1, \ldots, A_\kappa$ *чыныгы сандар.* $P^*(x)$ *чыныгы коэффициенттүү көп мүчө,* $P^*(x)/Q^*_{n-\kappa}(x)$ *дурус бөлчөк, ал эми* $x = a$ *саны* $Q^*_{n-\kappa}(x)$ *көп мүчөсүнүн тамыры боло албайт.*

2-лемма. *Эгерде* $P_m(x)/Q_n(x)$ *дурус бөлчөк болсо, ал эми* $x_0 = \gamma + i\delta$ *саны* $Q_n(x)$ *көп мүчөсүнүн в эселүү чыныгы эмес тамыры болсо, анда B жана D чыныгы сандар жана ошондой эле чыныгы коэффициенттүү* $P(x)$ *көп мүчөсү аныкталат да*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx+D}{(x^2+Px+q)^s} + \frac{\overline{P}(x)}{(x^2+Px+q)^{s-1}\overline{Q}_{n-2s}(x)} \tag{18}$$

барабардыгы орун алат. Бул (18) формуланын оң жагындагы экинчи кошулуучу дурус бөлчөк, B, D сандар жана $P(x)$ *көп мүчөнүн коэффициенттери бир маанилүү аныкталат, ал эми* $Q_{n-2s}(x)$ *көп мүчө* $Q_n(x)$ *ти* $(x^2+px+q)^s$ *ке бөлгөндөгү тийинди.*

$$(x^2+px+q=(x-x_0)(x-\bar{x}_0)).$$

○ Лемманын шартындагы B жана D сандары

$$\psi(x)=P_m(x)-(Bx+D)\overline{Q}_{n-2s}(x), \tag{19}$$

көп мүчө x^2+px+q үч мүчөгө калдыксыз бөлүнгөндөй тандап алалы. Ал эми бул шарт, 1-жана 2-теорема боюнча, x_0 саны $\psi(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры болгон учурда гана, б.а. $\psi(x_0)=0$ болгондо гана орун алат же

$$P_m(x_0)-(B_0+D)\overline{Q}_{n-2s}(x_0)=0 \tag{20}$$

орун алганда. Мындан (10) шартты эске алып

$$Bx_0+D=\frac{P_m(x_0)}{Q_{n-2s}(x_0)} \tag{21}$$

барабардыгын алабыз. Эгерде (21) барабардыктын оң жагындагы бөлчөктүн чыныгы жана мнимый бөлүгү c жана d болсо, анда ал барабардыкты

$$D+B(\gamma+i\delta)=c+id$$

түрүндө жазабыз жана андан B жана D чыныгы сан деп эсептеп

$$\begin{cases} B\gamma+D=c \\ \delta D=d \end{cases} \tag{22}$$

системасын алабыз. $\delta\neq 0$ болгондуктан бул (22) системадан, $\psi(x_0)=0$ шарты орун алганда, B жана D чыныгы сандарды бир маанилүү аныктайбыз жана ошондой эле (22) системаны же (21) шартты канагаттандырган B жана D нын маанилеринде $\psi(x)$ көп мүчөсү x^2+px+q үч мүчөсүндө калдыксыз бөлүнөт. Ошол себептүү бир гана чыныгы коэффициенттүү $\overline{P}(x)$ көп мүчөсү аныкталып

$$\psi(x)=(x^2+px+q)\overline{P}(x) \tag{23}$$

барабардыгы орун алат. Эми (19) жана (23) формуладан

$$P_m(x)=(Bx+D)\overline{Q}_{n-2s}(x)=(x^2+px+q)\overline{P}(x) \tag{24}$$

барабардыкты алабыз. Бул (24) барабардыктын эки жагын $Q_n(x)=(x^2+px+q)^s\overline{Q}_{n-2s}(x)$ көп мүчөсүнө бөлүп, (18) формулага ээ болобуз. Андагы $\dfrac{\overline{P}(x)}{(x^2+px+q)^s Q_{n-2s}(x)}=\dfrac{\psi(x)}{Q_*(x)}$ — дурус бөлчөк. Чынында эле эгерде $\psi(x)$ көп мүчөсүнүн даражасы r болсо, анда $r\leqslant m$ жана $r\leqslant n-2s+1$, мындан $r\leqslant n-1$ келет. ●

Натыйжа. *Ушул лемманы s ирет колдонсок*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{B_s x+D_s}{(x^2+px+q)^s}+\frac{B_{s-1}x+D_{s-1}}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\ldots+\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{P^*(x)}{\overline{Q}_{n-2}(x)}, \quad (25)$$

формулага ээ болобуз. Мында B_j, $D_j(j=\overline{1,s})$ чыныгы сандар. $P^*(x)$ чыныгы коэффициенттүү көп мүчө. $P^*(x)/Q_{n-2s}(x)$ дурус бөлчөк, бирок $Q_{n-2s}(x)$ көп мүчө x^2+px+q үч мүчөгө калдыксыз бөлүнө албайт.

4-теорема. *Эгерде $P_m(x)$ жана $Q_n(x)$ көп мүчөлөрүнүн даражалары ирети менен m жана n болуп, бирок $m<n$, коэффициенттери чыныгы сандар болсо, ал эми көп мүчөкү $Q_n(x)$ (11) формула сыяктуу ажыраса, анда*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(\alpha_1-1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)}+\ldots+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{A_k^{(1)}}{x-a_k}+\frac{B_1^{(\beta_1)}x+D_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{B_1^1x+D_1^1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B_s^{(\beta_s)}x+D_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\ldots+\frac{B_s^{(1)}x+D_s^{(1)}}{x^2+p_sx+q_s},$$

же

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_m}\frac{A_m^{(j)}}{(x-a_m)^j}+\sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{\beta_m}\frac{B_m^{(j)}x+D_m^{(j)}}{(x^2+p_mx+q_m)^j} \quad (26)$$

формуласы орун алат. Бирок коэффициенттер (26) формуладагы чыныгы сандар жана алар бир маанилүү аныкталышат.

○ Биз, алгенде 1-лемманы колдонуп $A_1^{(p)}/(x-a_1)^p$ $(p=\overline{1,\alpha_1})$ түрүндөгү жөнөкөй (элементардык) бөлчөктөрдү бөлүп алабыз. Андан кийин $P^{*}(x)/Q_{n-\alpha_1}(x)$ бөлчөгүнө кайра 1-лемманы (17-формуланы) колдонобуз жана ушул процессти, $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн бардык чыныгы тамырларына туура келген жөнөкөй бөлчоктөрдү бөлмөйүнчө, уланта беребиз. Анда, жыйынтыгында $P_m(x)/Q_n(x)$ дурус бөлчөгү

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{m=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\alpha_m}\frac{A_m^{(j)}}{(x-a_m)^j} + \frac{P(x)}{Q_{n-t}^{*}(x)} \tag{27}$$

түрүнө келет. Мында $t = n - \sum_{m=1}^{\kappa}\alpha_m$, $P(x)/Q_{n-t}^{*}(x)$ дурус бөлчөк, ал эми $Q_{n-t}^{*}(x)$ коп мүчөсү чыныгы тамырга ээ болбойт.

Ар бир $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн түгөй комплекстүү түйүндөш тамырларына 2-лемма (25-формуланы) колдонуп

$$\frac{P(x)}{Q_{n-t}^{*}(x)} = \sum_{m=1}^{s}\sum_{j=1}^{\beta_m}\frac{B_m^{(j)}x + D_m^{(j)}}{(x^2 + p_m x + q_m)^j} \tag{28}$$

формуласын алабыз. Ушул (27) жана (28) формулалардан, дурус рационалдык бөлүктөрдү жөнөкөй (элементардык) бөлчөктөргө ажыралышын бере турган (26) формуланы алабыз. ●

М и с а л ы, эгерде $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+3)^3(x^2+1)(x^2-3x+5)^2}$ дурус бөлчөгү берилсе, анда аны жөнөкөй бөлчөктөргө

$$f(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-1)^2} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-3)} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-3)^2} + \frac{A_2^{(3)}}{(x-3)^3} + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{x^2-3x+5} + \frac{B_2^{(2)}x + D_2^{(2)}}{(x^2-3x+5)^2}$$

түрүндө жазабыз.

3. Коэффициенттерди аныктоо ыкмалары (практикалык).

1) Аныкталбаган коэффициенттер ыкмасы. Биз (26) ажыралыштагы ошондой эле жогорку мисалдардагы A_m^j,

B_m^j, D_m^j коэффициенттерди аныктоо үчүн (26) формуланын оң жагындагы жөнөкөй бөлчөктөрдү жалпы орток бөлүмгө келтиребиз. Ал орток бөлүм $Q_n(x)$ көп мүчөсү болот. Бул учурда (26) формула $P_m(x)/Q_n(x) = T(x)/Q_n(x)$ түрүнө келет. Мындан $P_m(x) = T(x)$ көп мүчөнүн көп мүчөгө барабардыгы келип чыгат. Андан кийин, барабардыктын оң жана сол жагындагы бирдей даражадагы x тин ($P_m(x)$ жана $T(x)$ көп мүчөлөрүнө катышкан) коэффициенттерин барабарлап, изделген коэффициенттерге карата сызыктуу теңдемелер системасына ээ болобуз. Бул система 4-теорема боюнча бир гана чыгарылышка ээ болгондуктан, изделген коэффициенттер бир маанилүү аныкталат. Ушул ыкма *аныкталбаган коэффициенттер ыкмасы* деп аталат.

Мисалы. 20. $\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ дурус бөлчөгүн жөнөкөй бөлчөктөргө

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{2x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1}$$

ажырайт. Жалпы орток бөлүмгө келтирип, келип чыккан бөлчөктүн алымын барабарласак

$$x = A_1(2x-1)(x^2+1) + A_2(x+1)(x^2+1) + Bx(x+1)(2x-1) + D(x+1)(2x-1) \qquad (*)$$

көп мүчөнүн көп мүчөгө теңдеш барабардыгын алабыз. Мындан бирдей даражадагы x тин коэффициенттерин барабарлап

$$\begin{array}{l|l} x^0 & -A_1 + A_2 - D = 0 \\ x^1 & 2A_1 + A_2 - B + D = 1, \\ x^2 & -A_1 + A_2 + B + 2D = 0, \\ x^3 & 2A_1 + A_2 + 2D = 0 \end{array}$$

изделген коэффициенттерди өз ичине алган сызыктуу теңдемелердин системасына ээ болобуз. Бул системадан $A_1 = 1/6$, $A_2 = 4/15$, $B = -3/10$, $D = 1/10$ бир маанилүү аныкталат.

21. $\dfrac{6x+6}{x^3(2x+3)^2}$ дурус бөлчөгү берилсин. Анда

$$\frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{2x+3}+\frac{B_2}{(2x+3)^2} \qquad (**)$$

жогорку мисал сыяктуу

$$\begin{array}{l} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 0=4A_1+2B_1 \\ 0=4A_2+B_2 \\ 0=9A_1+12A_2+4A_3 \\ 6=9A_2+12A_3 \\ 6=9A_3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A_1=0,\ A_2=-\dfrac{2}{9},\ A_3=\dfrac{2}{3}, \\ B_1=0,\ B_2=\dfrac{8}{9}. \end{array}$$

Демек, биз канча белгисиз коэффициент болсо, ошончо теңдемелердин системасын чыгарышыбыз керек, бирок системаны чыгарбай эле изделген коэффициенттерди жеңилирээк ыкма менен аныктоого болот. Ал үчүн (*) бирдейлигин карайлы:

а) биринчи бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө барабарлап, $x=-1$ маанини (*) барабардыгына койсок $-1=A_1(-3)\cdot 2$, мындан $A_1=1/6$;

б) Экинчи бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө барабарлап, $x=\dfrac{1}{2}$ маанини (*) барабардыгына койсок $\dfrac{1}{2}=A_2\cdot 3/2\cdot 5/4$, мындан $A_2=4/15$;

в) $x=0$ койсок $0=-A_1+A_2-D$, мындан $D=A_2-A_1=1/10$; (үчүнчү бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө барабарлай албайбыз, себеби ал бөлүм комплекстүү тамырга ээ).

г) B — коэффициентин алдыңкы ыкма боюнча аныктайбыз, б.а. x^3 коэффициенттерин барабарласак $0=2A_1+$ $+A_2+2D$, мындан

$$D=-\frac{1}{2}(2A_1+A_2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)=-\frac{3}{10}.$$

2) Сызуу ыкмасы. Аныкталбаган коэффициенттердин кээ бирөөлөрүн сызуу ыкмасы деп аталуучу төмөнкү ыкма менен аныктасак болот. Бизге

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}, \quad \varphi(a) \neq 0$$

дурус бөлчөгү берилип, a — чыныгы саны $Q_n(x)$ көп мүчөсүнүн α — эселүү тамыры болсун. $P_m(x)/Q_n(x)$ бөлчөгүнүн эселүү $x=a$ тамырына

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a}$$

ажыралыш туура келет. Эми A_α коэффициентин аныктоо үчүн, алгачкы $P_m(x)/(x-a)^\alpha \varphi(x)$ бөлчөгүндөгү $(x-a)^\alpha$ ны сызып, калган бөлчөккө $x=a$ маанини коёбуз. Анда

$$A_\alpha = \frac{P_m(a)}{\varphi(a)}.$$

Мисалы. 22.

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_4}{x-2}$$

ажыралыштан

$$A_1 = \left.\frac{x+2}{(x+1)(x-1)(x-2)}\right|_{x=0} = 1,$$

$$A_2 = \left.\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}\right|_{x=1} = -\frac{3}{2},$$

$$A_3 = \left.\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{6},$$

$$A_4 = \left.\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{2}{3}.$$

3) *Аралаш ыкма.* Жогорудагы 21-мисалдагы (**) ажыралышты карайлы. Бөлчөктүн бөлүмүндөгү көп мүчө үч эселүү $x=0$, эки эселүү $x=-\frac{3}{2}$ тамырларга ээ. Адегенде үч эселүү тамырларга туура келген жөнөкөй бөлчөктөрдүн алымындагы коэффициенттерди аныктайлы. Ал үчүн

$$f(x) = \frac{B_1}{2x+3} + \frac{B_2}{(2x+3)^2}$$

деп белгилеп, (**) барабардыгын x^3 ка көбөйтсөк

$$\frac{6x+6}{(2x+3)^2} \equiv A_1x^2 + A_2x + A_3 + x^3 f(x) \qquad (29)$$

бирдейлигин алып, $x=0$ десек, $A_3 = \left.\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right|_{x=0} = \frac{2}{3}$ табабыз. Эми (29) бирдейликти дифференцирлеп

$$\left[\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right]' = 2A_1x + A_2 + 3x^3 f(x) + x^3 f'(x) \qquad (30)$$

дагы $x=0$ десек, A_2 коэффициентин аныктайбыз, б.а.

$$A_2 = \left[\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right]'\Bigg|_{x=0} = -\frac{2}{9}.$$

Ушундай эле, (30) бирдейликти дагы бир жолу дифференциялап,

$$\left[\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right]'' = 2A_1 + \left[3x^2 f(x) + x^3 f'(x)\right]'$$

келип чыккан жыйынтыкка $x=0$ деп (себеби $x=0$ үч эселүү тамыр) A_1 коэффициентин аныктайбыз.

$$\left[\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right]''\Bigg|_{x=0} = 2A_1 \text{ же } A_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{6x+6}{(2x+3)^2}\right]''\Bigg|_{x=0} = 0.$$

Калган эки эселүү тамырга туура келген B_1 жана B_2 коэффициенттерди аныктоо үчүн (**) бирдейлигин $(2x+3)^2$ ка көбөйтүп, келип чыккан жыйынтыкка $x=-\frac{3}{2}$ маанини коюп,

$$B_2 = \left.\frac{6x+6}{x^3}\right|_{x=-\frac{3}{2}} = \frac{8}{9},$$

B_2 коэффициенттин аныктайбыз. Ал эми B_1 коэффициентин

$$B_1 = \left[\frac{6x+6}{x^3}\right]'\Bigg|_{x=-\frac{3}{2}} = 0$$

аркылуу аныктайбыз.

Бул ыкма бөлчөктүн бөлүмү чыныгы эселүү тамырга ээ болгон учурда өтө ыңгайлуу.

§ 3. РАЦИОНАЛДЫК, ИРРАЦИОНАЛДЫК, ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДОО

1. Рационалдык функцияларды интегралдоо.

Алдыдагы § 2 (4-теоремада), ар кандай $P_m(x)/Q_n(x)$, мында $P_m(x)$ жана $Q_n(x)$ ирети менен m жана n $(m<n)$ даражадагы чыныгы коэффициенттүү көп мүчө:

$$\frac{A}{(x-a)^r},\ r\in \mathbf{N}, \tag{1}$$

$$\frac{Bx+P}{(x^2+px+q)^\kappa},\ \kappa\in \mathbf{N},\ p^2-4q<0 \tag{2}$$

түрүндөгү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасына ажырай тургандыгы далилденди.

Эгерде $P_m(x)/Q_n(x)$ бөлчөгү буруш $(m\geqslant n)$ бөлчөк болсо, анда алымын бөлүмүнө, көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү эрежеси боюнча бөлүп,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=s(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

түрүндө жазсак болот. Мында $s(x)$ — көп мүчө $P_m(x)$ ти $Q_n(x)$ ке бөлгөндөгү тийинди же бүтүн бөлүгү, $R(x)$ бөлүүдөгү калдык, $R(x)/Q_n(x)$ дурус бөлчөк.

Мисалы, $x^4/(x^2-x+1)$ бөлчөгү буруш, анда жогоруда айтылгандай

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4\pm x^3\mp x^2 & x^2+x \\ \cline{1-1}
x^3-x^2 & \\
-x^3\pm x^2\mp x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -x &
\end{array}$$

бөлсөк, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{x^4}{x^2-x+1}=x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1} \tag{3}$$

Эми рационалдык жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоого көңүл буралы. Адегенде (1) бөлчөктү карайлы. Эгерде $r=1$ болсо, төмөнкүгө ээ болобуз:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$

Эгерде $r>1$ болсо, төмөнкүчө болот:

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^r} = \frac{A}{(1-r)(x-a)^{r-1}}+C.$

Демек, (1) түрдөгү бөлчөктөрдү интегралдоо логарифмалык ($r=1$) функцияны же дурус рационалдык ($r>1$) бөлчөгүн алабыз.

Эми (2) бөлчөктүн интегралданышын карайлы. Ал үчүн

III. $J_\kappa = \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^\kappa}dx$

белгилеп, бөлүмүндөгү үч мүчөнү өзгөртүп түзөлү,

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},\ q-\frac{p^2}{4}>0$$

жана $\sqrt{q-p^2/4}=a$, $x+\frac{p}{2}=t$ деп белгилесек,

$$J_\kappa=\int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+a^2)^\kappa}dt$$

түрүнө келет. Ошентип, J_κ интегралы

$$J_\kappa'=\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^\kappa} \text{ жана } J_\kappa''=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\kappa}$$

интегралдарынын сызыктуу комбинациясынан турат.

Бул интегралдар $\kappa=1$ болсо оңой эле интегралданат, алсак:

$$J_1'=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C,$$

$$J_1''=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}arctg\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Эгерде $\kappa > 1$ болсо, анда

$$J'_\kappa = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\kappa} = \frac{1}{2(1-\kappa)(x^2+px+q)^{\kappa-1}} + C,$$

ал эми J''_κ интегралын § 1, (17-мисалдагы) рекуренттик формула аркылуу эсептөөгө болот жана ал J''_κ интегралынын жыйынтыгы дурус рационалдык бөлчөк менен арктангенс функциясынын сызыктуу комбинациясынан турат.

Мына ошентип, ар кандай рационалдык бөлчөктөрдүн интегралдары көп мүчөлөрдү (буруш бөлчөктү карасак), дурус рационалдык бөлчөктөрдү, логарифмалык функцияларды жана арктангенс функцияларынын сызыктуу комбинациясын берет.

Мисалы. 23. $J = \int\frac{x^4dx}{x^2-x+1}$ интегралын эсептегиле.

△ Алдыдагы (3) барабардыкты

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x^2 + x - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

түрүндө жазып, интегралдасак

$$J = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

жыйынтыгына келебиз. ▲

24. $J = \int\frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}$ интегралы берилсин.

△ Интеграл ичиндеги функция рационалдык дурус бөлчөк, ал эми бөлүмү чыныгы ар түрдүү тамырга ээ. Ошондуктан

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-3}. \qquad (4)$$

Бул барабардыктын эки жагын, сол жакки бөлчөктүн бөлүмү $(x+2)(x-1)(x-3)$ туюнтмасына көбөйтүп жиберсек

$$1 = A_1(x-1)(x-3) + A_2(x+2)(x-3) + A_3(x+2)(x-1) \qquad (5)$$

барабардыгына ээ болобуз. Ал эми A_1, A_2 жана A_3 коэффициенттерин § 2, 3-пункттагы ыкмалар аркылуу аныктасак

21*

болот. Атап айтканда (5) барабардыкка, адегенде $x=-2$ андан кийин $x=1$, акырында $x=3$ маанилерди койсок,

$$1=15A_1,\ 1=-6A_2,\ 1=10A_3,$$

же

$$A_1=1/15,\ A_2=-1/6,\ A_3=1/10$$

коэффициенттерин аныктайбыз, же сызуу ыкмасы менен:

$$A_1=\frac{1}{(x-1)(x-3)}\Big|_{x=-2}=\frac{1}{15},\ A_2=\frac{1}{(x+2)(x-3)}\Big|_{x=1}=-\frac{1}{6},$$

$$A_3=\frac{1}{(x+2)(x-1)}\Big|_{x=3}=\frac{1}{10}$$

ошол эле жыйынтыкка келебиз. Анда

$$J=\frac{1}{15}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|x-1|+\frac{1}{10}\ln|x-3|+C=\frac{1}{30}\ln\frac{(x-2)^2|x-3|^3}{|x-1|^5}+C. \blacktriangle$$

25. $J=\frac{3x^2-5x+10}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}dx$ интегралын интегралдагыла.

$\triangle$ Интеграл ичиндеги функция $f(x)$ рационалдык дурус бөлчөк, ал эми бөлүмүндөгү квадраттык үч мүчөнүн дискрименанты терс, ошондуктан

$$f(x)=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+5}$$

ажыралышын алабыз. Мындан

$$3x^2-5x+10=A_1(x^2+2x+5)+A_2(x-1)(x^2+2x+5)+$$
$$+(Bx+D)(x-1)^2 \qquad (6)$$

бирдейлигин жаза алабыз. $x=1$ десек, $8=8A_1$ же $A_1=1$ болот. (6) бирдейликти дифференциялап, келип чыккан жыйынтыгына $x=1$ десек, $4=4+4A_2$ же мындан $A_2=0$ экендигин алабыз. Калган коэффициенттерди аныктоо үчүн (6) бирдейликтин оң жана сол жагындагы x^3 тун коэффициенттерин жана бош мүчөлөрдү барабарласак $3=B$, $10=5A_1+D$ же $D=5$ келет. Ошентип, аныкталган коэффициенттердин ордуна $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3x+5}{x^2+2x+5}=\frac{1}{(x-1)^2}+$ $+\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+2\frac{1}{(x+1)^2+4}$ коюп, өзгөртүп жана интегралдасак,

$$J=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}ln(x^3+2x+5)+arctg\frac{x+1}{2}+C$$

жыйынтыгына келебиз. ▲

26. $\int\frac{dx}{x^4+1}$ интегралын чыгаргыла.

△ Ал үчүн

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-\left(\sqrt{2}x\right)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

барабардыгын колдонуп x^4+1 көп мүчөнүн тамыры чыныгы эмес экендигин эске алып,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Bx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{B_1x+D_1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

ажыралышына ээ болобуз. Мындан

$$1=(Bx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(B_1x+D_1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \qquad (7)$$

барабардыгына ээ болуу менен x^3, x^2, $x^1=x$, x^0 бош мүчөлөрдүн коэффициенттерин барабарлап:

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} 0=B+B_1, \\ 0=-B\sqrt{2}+D+B_1\sqrt{2}+D_1, \\ 0=B-\sqrt{2}D+B_1+\sqrt{2}D_1, \\ 1=D+D_1. \end{cases}$$

Бул системанын биринчи, үчүнчү жана төртүнчү теңдемелеринен $D=D_1$, $2D=1$ же $D=D_1=\frac{1}{2}$ маанилерди алабыз, ал эми биринчи, экинчи жана төртүнчү теңдемелеринен $B_1=-B$, $2B\sqrt{2}=D+D_1=1$ же булардан $B=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B_1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ маанилерин алабыз.

Демек, $\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}$ ажыралышын алабыз.

Ал эми, $\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx +$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+arctg(x\sqrt{2}+1)+C_1,$$

$$\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx = \frac{1}{2}\,ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-arctg(x\sqrt{2}-1)+C_2$$

болгондуктан,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(arctg(x\sqrt{2}+1)-arctg(x\sqrt{2}-$$
$$-1))+C. \blacktriangle$$

Э с к е р т у у. Алдыдагы B, D, B_1, D_1 коэффициенттери башка жол менен да аныкталышы мүмкүн. Анткени x^4+1 көп мүчөсүнүн тамырын $x_k = e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ мында $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, формуласынан да эсептесек болот. Бул учурда $x^2+x\sqrt{2}+1$ үч мүчөсүнүн тамыры $x_0 = e^{i\cdot\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; $x^2-\sqrt{2}x+1$ үч мүчөсүнүн тамыры $x=x_3=-x_0$. Эми (7) барабардыкка $x=x_0$ маанини коюп, келип чыккан жыйынтыктын чыныгы жана мнимый бөлүктөрүн салыштырып B_1 жана D_1 коэффициенттерин, ушундай эле $x=-x_0$ маанини коюп, B жана D коэффициенттерин аныктай алабыз.

27. $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$ интегралын эсептегиле.

△ Интеграл ичиндеги функция

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}+\frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}$$

түрүндө ажыратсак болот. Жалпы орток бөлүмгө келтиребиз:

$$3x+1 = A(1+x^2)^2+(B_1x+C_1)(1+x^2)\,x+(B_2x+C_2)x, \qquad (8)$$

мындагы A, B_1, C_1, B_2 жана C_2 коэффициенттерин, (8) бирдейликтин оң жана сол жагындагы бирдей даражадагы x тин коэффициенттерин барабарлап,

$$\begin{cases} A + B_1 = 0, \\ C_1 = 0, \\ 2A + B_1 + B_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 3, \\ A = 1 \end{cases}$$

системадан аныктайбыз, анда $A = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = 0$, $B_2 = -1$, $C_2 = 3$. Табылган коэффициенттерди ордуна коюп,

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2}$$

ажыралышын алабыз. Бул учурда изделүүчү интегралды

$$\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{(x-3)}{(1+x^2)^2} dx \tag{9}$$

түрдө жазып, биринчи эки интегралды жеңил эле интегралдасак

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x|, \quad \int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} ln(1+x^2)$$

болот. Үчүнчү интегралды эки интегралга ажыратып, өзгөртүү керек.

$$\int \frac{(x-3)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{dx}{1+x^2} +$$

$$+3\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)^2} - 3arctgx + 3\left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right]^* =$$

$$= -\frac{1}{2(1+x^2)^2} - 3arctgx - \frac{3x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} arctgx + C =$$

$$= -\frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} arctgx - C.$$

---

*Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы колдонду $u = x$, $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

Демек, анда (9) интегралдын жыйынтыгы

$$\int \frac{(3x+1)}{x(1+x^2)^2}dx = ln|x| - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}arctgx + C,$$

түрүндө болот. ▲

Көпчүлүк учурда, $f(x)$ рационалдык бөлчөктөрдүн интегралдарын эсептөөдө, аларды жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратпай эле, кандайдыр бир башка мисалы, $f(x)$ бөлчөгүн өзгөртүп түзүү, ылайыктуу алмаштырууларды колдонуу же бөлүктөп интегралдоо ыкмаларын колдонууга болот.

Мисалы. 28. $\frac{x^4}{x^{10}+2}$, $\frac{x^2}{(x-1)^5}$, $\frac{x^2+1}{x^4+1}$, $\frac{1}{x^4(1+x^2)}$,

$$\frac{1}{(x-a)^n(x-b)^m},\ (n,\ m \in Z).$$

△ а) $\int \frac{x^4}{x^{10}+2}dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{(x^5)^2+2} = \frac{1}{5\sqrt{2}}arctg\frac{x^5}{\sqrt{2}} + C.$

б) $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^5} = \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^5}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} -$

$-\frac{1}{4(x-1)^4} + C.$

в) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} +$

$+C = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C.$

г) $\frac{1}{x^4(1+x^2)} = \frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{x^4} + \frac{1}{1+x^2}$ өзгөртүүсүн колдонсок, анда $\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + arctgx + C.$

д) Акыркы туюнтманы интегралдоо үчүн $\frac{x-a}{x-b} = t$ алмаштыруусу ылайыктуу. Бул учурда

$$x-a = t(x-b) \text{ же } (x-b)+(b-a) = t(x-b),$$

мындан

$$x-b=\frac{b-a}{t-1},\ x-a=(b-a)\frac{t}{t-1},\ dx=-\frac{b-a}{(t-1)^2}dt.$$

Демек, $\int\frac{dx}{(x-a)^n(x-b)^m}=-\int\frac{(b-a)(t-1)^m(t-1)^n dt}{(b-a)^n t^n(b-a)^m(t-1)^2}=$

$=-\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(t-1)^{m+n-2}}{t^n}dt$ алымын Ньютондун биномун колдонуп, ажыратып, бөлүмүнө мүчөлөп болсок, даражалуу функциялардын суммасынын интегралы келип чыгат. Алардан интеграл алуу жеңил. ▲

2. Остроградскийдин ыкмасы.

Рационалдык дурус бөлчөктүн $P(x)/Q(x)$ бөлүмү $Q(x)$ чыныгы эмес эселүү тамырга ээ болгон учурунда

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}+\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx \tag{10}$$

формуласын колдонуу ыңгайлуу. Мында $Q_1(x)$ көп мүчөсү $Q(x)$ көп мүчөсүнүн тамырларындай эле тамырга ээ болот, бирок эселүүсү төмөн жана $Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$; $P_1(x)$ менен $P_2(x)$ — көп мүчөлөр, ал эми $P_1(x)/Q_1(x)$ жана $P_2(x)/Q_2(x)$ — дурус рационалдык бөлчөктөр. Алдынкы (10) формуланын оң жаккы экинчи сумманын интегралы логарифма жана арктангенс аркылуу туюнтулуп, $P(x)/Q(x)$ бөлчөгүнүн интегралынын трансценденттик бөлүгү болот.

Остроградскийдин ыкмасы (10-формула) интегралдын рационалдык бөлүгүн ($P_2(x)/Q_2(x)$ функциясын) алгебралык жол менен (интегралдабай эле) бөлүп алууга мүмкүндүк берет. Ал эми $P_1(x)$ жана $P_2(x)$ көп мүчөлөрүн аныкталбаган коэффициенттер аркылуу жазышып, ал коэффициенттерди (10) теңдештикти дифференциялап алынган туюнтмадан табабыз.

Мисалы. 29. $\int\frac{(6x+6)dx}{x^3(2x+3)^2}$ интегралын Остроградскийдин ыкмасы аркылуу эсептейли. Биздин учурда

$\triangle\ \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2}$, $Q(x) = x^3(2x+3)^2$, $Q'(x) = 3x^2(2x+3)^2 +$

$$+4(2x+3)x^3 = x^2(2x+3)(10x+9);$$

$Q_1(x) = x(2x+3)$ ($Q_1(x)$ — көп мүчөсүн $Q(x)$ жана $Q'(x)$ көп мүчөлөрүнүн эң чоң жалпы бөлүүчү катарында түзүш керек).

$$Q_2(x) = x^2(2x+3),\ P_2(x) = Ax^2 + Bx + C,\ P_1(x) = Dx + E.$$

Демек, (10) формула аркылуу, берилген интегралды

$$\int \frac{(6x+6)dx}{x^3(2x+3)^2} \equiv \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(2x+3)} + \int \frac{Dx+E}{x(2x+3)}dx$$

түрүндө жазабыз. Издеген A, B, C, D жана E коэффициенттерди аныктоо үчүн, акыркы бирдейликти дифференциялап,

$$\frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2} \equiv \frac{x^2(2x+3)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx^2+C)(6x^2+6x)}{x^4(2x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x(2x+3)}$$

жана бөлүмдөн кутулуп,

$$6x+6 \equiv (2x^2+3x)(2Ax+B)-(6x+6)(Ax^2+Bx+C)+$$
$$+(Dx+E)(2x^3+3x^2)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул бирдейликтин оң жана сол жагындагы бирдей даражадагы x тин коэффициенттерин барабарлап,

$$\begin{array}{l} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \begin{cases} 2D = 0, \\ 4A - 6A + 2E + 3D = 0, \\ 2B + 6A - 6A - 6B + 3E = 0, \\ 3B - 6C + 6B = 6, \\ -6C = 6 \end{cases}$$

системаны алабыз. Бул системадан $C = -1$, $B = 0$, $E = 0$, $D = 0$, $A = 0$.

Анда, $\int \frac{(6x+6)dx}{x^3(2x+3)^2} = -\frac{1}{x^2(2x+3)} + C$

түрүндөгү жыйынтыкка ээ болобуз. ▲

30. $\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2}$ интегралын эсептегиле.

△ Мында, $Q(x) = x(1+x^2)^2$, $Q'(x) = (1+x^2)^2 + 4x^2(1+x^2) =$ $= (1+x^2)(1+5x^2)$

ошондуктан,

$$Q_2(x) = 1+x^2, \; Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = x(1+x^2),$$

$$P_2(x) = Ax + B, \; P_1(x) = Cx^2 + Dx + E.$$

Анда,

$$\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{x(1+x^2)}dx$$

эки жагын дифференциялап,

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} \equiv \frac{(1+x^2)A-(Ax+B)2x}{(1+x^2)^2} + \frac{Cx^2+Dx+E}{x(1+x^2)}$$

же бөлүмдөн куткарып,

$$3x+1 = Ax - Ax^3 - 2Bx^2 + (Cx^2+Dx+E)(1+x^2)$$

оң жана сол жактагы бирдей даражадагы x тин коэффициенттерин барабарлап,

$$\begin{array}{c} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \begin{cases} C = 0, \\ -A + D = 0, \\ -2B + C + E = 0, \\ A + D = 3, \\ E = 1 \end{cases}$$

системаны алабыз. Бул системадан $C = 0$, $E = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $D = \frac{3}{2}$, $A = \frac{3}{2}$.

Демек, $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx = \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx.$

Акыркы интегралды эсептейли. Ал үчүн

$$\frac{3x+2}{x(1+x^2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1x+C_1}{1+x^2}$$

ажыралышын жазып, мындан

$$3x+2=A_1(1+x^2)+(B_1x+C_1)x$$

барабардыгын алабыз. Эгерде $x=0$ десек, анда $A_1=2$ жана $x=-1$, $x=1$ десек, анда

$$\begin{cases} -1=2A_1+B_1-C_1=4+B_1-C_1, \\ 5=2A_1+B_1+C_1, \end{cases}$$

мындан $B_1=-2$, $C_1=3$. Анда

$$\frac{1}{2}\int\frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-3}{1+x^2}dx=ln|x|-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+$$

$$+\frac{3}{2}arctgx+C,$$

жыйынтыгында

$$\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx=\frac{3x+1}{2(1+x^2)}+ln|x|-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+\frac{3}{2}arctgx+C. \blacktriangle$$

3. Иррационалдык функцияларды интегралдоо.

Көпчүлүк иррационалдык функциялардын интегралдарын ар кандай (ылайыктуу) алмаштыруунун жардамы менен рационалдык функциялардын интегралына келтирип өзгөртүп түзүшөт.

Бул пунктта жана мындан ары R тамгасы менен рационалдык функцияларды белгилейбиз. Мисалы, $R(u,\ v)$ деген жазуу u жана v өзгөрмөлөрүнөн рационалдык функция экендигин түшүндүрөт жана ал функция $R(u,\ v)=$ $=P(u,\ v)/Q(u,\ v)$ түрүндө жазылат. Мында P жана Q көп мүчөлөрүн көп мүчөлөрдүн $u^m v^n (m=0,1,\ ...;\ n=0,1,\ ...)$ түрүндөгү сызыктуу комбинациясынан түзүлөт. Алсак, $\frac{u^5-3uv+4u^2v^2-1}{u^4v+v-u^2v^2}$ — u жана v га карата рационалдык функция, $\frac{sin^3x-3tgx+1}{cos^4x-2ctg^2x}$ — $sinx$ жана $cosx$ ке карата рационалдык функция.

Рационалдык функциялардын интегралынын түрлөрүнө токтололу:

$$\text{а) } \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx \qquad (11)$$

түрүндөгү интеграл.

Каралып жаткан интегралда $r_1, \ldots, r_n$ рационалдык сандар; $r_i = \frac{P_i}{m}$, P_i — бүтүн сандар, $i = 1, \ldots, n$; m — саны $r_1, r_2, \ldots, r_n$ сандарынын жалпы орток бөлүмү жана аныктагыч $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Эгерде $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ болсо, анда $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ жана $\lambda a + \mu c = 0$, $\lambda b + \mu d = 0$ шарттарды канааттандыра турган λ жана μ аныкталып (мисалы $\lambda \neq 0$ үчүн),

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda(cx+d)} = \frac{-\mu cx - \mu d}{\lambda(cx+d)} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

барабардыгы аткарылып калат, ошондуктан (11) интегралдын алдындагы туюнтма жөнөкөй рационалдык функция болуп калмак.

Эми (11) интегралга

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (12)$$

алмаштыруусун колдонобуз. Анда,

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \equiv \rho(t).$$

Мында $\rho(t)$ — рационалдык функция, анда $\rho'(t)$ дагы рационалдык функция болот.

Демек,

$$dx = \rho'(t)dt, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_j} = (t^m)^{\frac{P_j}{m}} = t^{P_j}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

анда

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx = \int R(\rho(t), t^{P_1}, \ldots, t^{P_n})\rho'(t)dt =$$

$$= \int R^*(t)dt, \qquad (13)$$

мында $R^*(t) = R(\rho(t),\ t^{p_1},\ ...,\ t^{p_n})\rho'(t)$ — рационалдык функция.

Ошентип, (12) алмаштыруусу (11) интегралды (13) сыяктуу рационалдык функциялардын интегралына келтирет. Ал эми (13) интегралды эсептегенден кийин, кайра x — өзгөрүлмө чоңдугуна өтүү үчүн

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}},$$

алмаштыруусун алуу жетиштүү.

Алдыдагы (11) интегралдын тибине

$$\int R(x,\ (ax+b)^{r_1},\ ...,\ (ax+b)^{r_n})dx;\ \int R(x,\ x^{r_1},\ ...,\ x^{r_n})dx$$

түрүндөгү интегралдар да кирет.

Мисалы. 31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ Бул интегралды эсептеш үчүн (12) алмашуусунун негизинде

$$x = t^6,\ dx = 6t^5dt.$$

Анда $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\left[\int (t^2-t+1)dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] = 6\left[\frac{t^3}{3} - \right.$

$\left. -\frac{t^2}{2} + t - ln|t+1|\right] + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C.$ ▲

31. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ интегралын эсептеш үчүн (12) негизинде $x = t^2$ алмаштыруусун алалы. Мындан $dx = 2tdt$, анда:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t}\right) =$$

$$= 2(t - ln|1+t|) + C = 2\left(\sqrt{x} - ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right) + C.$$

Каралган (11) түрүндөгү интегралга $\int R\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)dx$ түрүндөгү интегралды келтирүүгө болот (x^2+px+q — квадраттык үч мүчө чыныгы ар түрдүү тамырга ээ болгон учурда). Чынында эле $x^2+px+q=(x-a)(x-b)$ болсо, анда

$$R\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)=R\left(x,\ \sqrt{(x-a)(x-b)}\right)=$$

$$=R\left(x,\ |x-b|\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\right)=R_1\left(x,\ \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right).$$

Мында R_1 — рационалдык функция. Демек.

$$\int R\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)dx=\int R_1\left(x,\ \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right)dx, \qquad (13')$$

(11) түргө келди.

Мисалы. 32. $\int\sqrt{(x-1)(x-2)}dx$ интегралын эсептейли. Ал үчүн интеграл алдындагы функциядан $(x-1)$ көбөйтүлүүчүнү радикал алдына чыгаралы. $x\geqslant 2$ деп эсептесек

$$\int\sqrt{(x-1)(x-2)}dx=\int(x-1)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx,$$

ал эми $x<1$ болсо

$$\int\sqrt{(x-1)(x-2)}dx=\int(1-x)\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx,$$

Эгерде $1<x<2$ болсо, анда интеграл алдындагы туюнтма мнимый.

Эми биз, мисалы, $x\geqslant 2$ учурун карап,

$$t^2=\frac{x-2}{x-1}$$

алмаштыруусун алсак, анда

$$x=\frac{2-t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}.$$

Ошондуктан,

$$\int\sqrt{(x-1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\frac{2tdt}{(1-t^2)^2}=2\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^3}\equiv J$$

рационалдык функциянын интегралын алдык. Акыркы интегралга бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонолу: $u=t$, $dv=\frac{tdt}{(1-t^2)^3}$ жана $du=dx$, $v=\frac{1}{4(1-t^2)^2}$. Анда:

$$J=-\int t\frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)^3}=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)+t^2}{(1-t^2)^2}dt=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-$$

$$-\frac{1}{4}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{1}{4}\int t\ \frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)^2}=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{t}{4(1-t^2)}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=\frac{t}{2(1-t^2)^2}-\frac{1}{8}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{t}{4(1-t^2)}+C.$$

Бул жыйынтыкты алгандан кийин $t=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ маанини коюш зарыл.

б) $$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0 \qquad (14)$$

түрүндөгү интегралды эсептөө талап кылынсын. Интеграл алдындагы туюнтманы рационалдык түргө келтирүү үчүн Эйлер* үч алмаштырууну сунуш кылган.

1) Эгерде $a>0$ болсо $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$ алмаштыруусун (15) алабыз. Мында "+" жана "–" белгилеринин каалаганын алууга болот. Эки жагын квадратка көтөрүп,

$$bx+c=t^2\pm 2\sqrt{a}tx,\ x=\frac{t^2-C}{b\mp 2\sqrt{a}t},\ dx=2\frac{\mp\sqrt{a}t^2+bt\mp 2\sqrt{a}c}{(b\pm 2\sqrt{a}t)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\mp\sqrt{a}t+bt\mp\sqrt{a}c}{b\mp 2\sqrt{a}t}$$

жана аныкталган маанилерди ордуна койсок интеграл алдындагы туюнтма рационалдык түргө келет. Аны интегралдаганды билебиз. Келип чыккан жыйынтыкка $t=$ $=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$ коёбуз.

---

*Леонард Эйлер (1707–1783) швейцариялык математик, ал өз өмүрүнүн көпчүлүк бөлүгүн Россияда Петербург илимдер Академиясында өткөрөт, ушул академиянын академиги болгон.

2) Эгерде $c > 0$ болсо $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ алмаштыруусун (16) алуу керек. Бул учурда дале жогоркудай

$$x = \frac{b \mp 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}, \; dx = 2\frac{\pm\sqrt{c}t^2 + bt \mp a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}, \; \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\mp\sqrt{c}t^2 + bt \mp a\sqrt{c}}{t^2-a}$$

маанилерин ордуна койгон учурда, интеграл алды рационалдык түргө келет. Интегралдап болгондон кийин, t ордуна $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} \mp \sqrt{c}}{x}$ маанини коюш зарыл.

1-эскертүү. Алдыдагы каралган учурларды ($a > 0$, $c > 0$) бирин экинчисине $x = 1/z$ алмаштыруусу аркылуу келтирүүгө болот.

3) Эгерде $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ түрлүү анык тамырларга ээ болсо, анда $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ деп алабыз. Мында деле

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = t^2(x-\alpha)^2; \; a(x-\beta) = t^2(x-\alpha), \qquad (17)$$

$$x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}, \; dx = \frac{2ta(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2}dt, \; \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}$$

маанилерин ордуна койгон кезде интеграл алдындагы туюнтма рационалдашат.

2-эскертүү. Квадраттык үч мүчө түрдүүчө анык тамырга ээ болгон учурда, интеграл алдын рационалдаштыруунун дагы бир ыкмасы жогоруда (13') формулада берилген.

Ошентип, (14) интеграл алдындагы туюнтманы рационалдаштыруу үчүн 1-жана 3-учур гана жетиштүү. Чынында эле, квадраттык үч мүчө түрдүү анык тамырга ээ болсо, 3-алмаштырууну, ал эми $a > 0$ болсо 1-алмаштырууну колдонобуз. $c > 0$ болгон учур, 1-эскертүү боюнча 1-алмаштырууга келтирилет.

Эгерде $b^2 - 4ac < 0$ болсо, анда

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 + (4ac - b^2)\right]$$

түрдө өзгөртүлүп, квадраттык үч мүчөнүн белгиси дайыма a нын белгиси менен дал келет. Ошондуктан $a > 0$ болушу зарыл. $a < 0$ болгон учурда радикал эч кандай анык мааниге ээ болбойт.

Мисалы. 33. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ Мында $a=1$, $c=2$ болгондуктан Эйлердин биринчи, ошондой эле экинчи алмаштыруусун колдонуута болот. Биз (15) формуланы колдонолу

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x,\ x^2+2x+2=t^2-2xt+x^2,\ 2x+2tx=t^2-2,$$

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)};\ dx=\frac{(1+t)2t-(t^2-2)\cdot 1}{2(1+t)^2}dt=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt,$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}=\frac{2+4t+2t^2-t^2+2}{2(1+t)}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Табылган маанилерди ордуна коюп,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\cdot 2\cdot(1+t)^2}dt=\int \frac{(t^2+2t+2)}{(1+t)(t+2)^2}dt$$

рационалдык функциянын интегралын алабыз. Интеграл алдындагы туюнтманы

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2}$$

жөнөкөй бөлчөктүн суммасына ажыратып, $A=1$, $C=-2$, $B=0$ коэффициенттерин аныктап, ордуна коюп интеграл алабыз,

$$\int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt=\int \frac{dt}{t+1}-2\int \frac{dt}{(t+1)^2}=ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C=$$

$$=ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.\ \blacktriangle$$

34. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$ интегралын чыгаргыла.

$\triangle$ Квадраттык үч мүчө $\alpha=0$, $\beta=-2$ түрдүү анык тамырга ээ болгондуктан (17) формула боюнча

$$\sqrt{x^2+2x}=xt$$

алмаштыруусун алып, мындан

$x^2+2x=x^2t^2$, $2=x(t^2-1)$, $x=\frac{2}{t^2-1}$, $dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt$, $x+1=$

$=\frac{2}{t^2-1}+1=\frac{1+t^2}{t^2-1}$, $(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}=x^2t^2\cdot xt=x^3t^3=\frac{8t^3}{(t^2-1)^3}$

маанилерин аныктап, ордуна койсок,

$$\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{(t^2+1)(t^2-1)^3 4t\,dt}{(t^2-1)(t^2-1)^2 8t^3}=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}dt=-\int dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-t+\frac{1}{2t}+C-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{2x}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+2x}}+C=-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}+C$$

жыйынтыгын алабыз.

Айрым учурларда Эйлердин (15), (16) жана (17) алмаштыруулары татаал рационалдык түргө келтирип, эсептөө бир кыйла кыйынчылыктарды түзүшү мүмкүн. Мындай учурларда (14) интегралды интегралдаш үчүн башка ыкма колдонулат. Атап айтканда (14) интегралдын интеграл алдындагы туюнтмасын $\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+R_2(x)$ ($R_1(x)$ жана $R_2(x)$ рационалдык бөлчөктөр), түргө келтирип, $R_1(x)$ ти $P_n(x)$ көп мүчөсүнүн суммасы жана жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында жазып, (14) интегралды

$$1)\ \int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx; \tag{18}$$

$$2)\ \int\frac{dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}},\ r\in\mathbb{N}; \tag{19}$$

$$3)\ \int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\kappa\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \kappa\in\mathbb{N},\ p^2-4ac<0 \tag{20}$$

интегралдарынын сызыктуу комбинациясына келтирүү жетиштүү.

Эми (18) интегралды интегралдаш үчүн

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{21}$$

формуласын колдонуу ыңгайлуу. Бул формулада $P_n(x)$ n-даражадагы көп мүчө, $Q(x)$ — даражасы $n-1$ ден ашпаган, аныкталбаган коэффициенттүү көп мүчө, λ — кандайдыр бир аныкталбаган сан. (21) формуланы дифференциялап келип чыккан жыйынтыгынын эки жагын тең $2\sqrt{ax^2+bx+c}$ туюнтмасына көбөйтүп,

$$2P_n(x) = 2Q'(x)(ax^2+bx+c)+Q(x)(2ax+b)+2\lambda \qquad (22)$$

барабардыгына ээ болобуз. Оң жана сол жактагы бирдей даражадагы x тин коэффициенттерин барабарлап, $Q(x)$ көп мүчөсүнүн коэффициенттерин жана λ санын аныктайбыз. Аныкталган маанилерди ордуна койгондо (21) формуланын оң жагындагы интеграл сызыктуу алмаштыруунун жардамы аркылуу таблицалык интегралга келерин байкайбыз.

Мисалы. 35. $J = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ интегралын чыгаргыла.

$\triangle$ Мында $P_n(x) = x^2$, $Q(x) = Ax+B$ болгондуктан (22) формуланы колдонсок, анда

$$2x^2 = 2A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda$$

түрүндө жазып, ал эми бул барабардыктан

$$2 = 2A+2A,\ 0 = 2A+A+2B,\ 0 = 2A+B+2\lambda$$

болгондуктан $A = 1/2$, $B = -3/4$, $\lambda = -1/8$ аныктайбыз, жана да

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}} = ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$$

интегралын эсептеп, (21) формулага койсок, анда

$$J = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$$

жыйынтыгын алабыз. ▲

36. $\int\frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ интегралын эсептегиле.

Эсептөө үчүн (21) формуланы колдонобуз.

$$\int\frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

дифференциялсак, анда

$$\frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{(Ax^2+Bx+C)(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

барабардыгын алабыз. Бөлүмүнөн куткарып, A, B, C коэффициенттерди жана λ ны аныктап, ордуна койсок берилген интеграл эсептелинет. Буларды аткаруу окуучуларга сунуш кылынат.

(19) түрүндөгү интегралдар

$$t=\frac{1}{x-a}$$

алмаштыруусун колдонсок, анда ал түздөн-түз (18) интегралга келтирилет.

Акырында (20) көңүл буралы. Эгерде $\forall x\in\mathbb{R}$ үчүн ω саны аныкталып $ax^2+bx+c=\omega(x^2+px+q)$, $(b=ap,\ c=aq)$ анда (20) интегралды

$$J_1\int=\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^{n+1/2}}\ \text{жана}\ J_2\int=\frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+1/2}}$$

интегралынын сызыктуу комбинациясы түрдө кароого болот. Бул J_1 интегралы таблицалык интегралга, ал эми J_2 интегралы Абелдин

$$U=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{2x+P}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

ордуна коюу ыкмасы аркылуу көп мүчөлөрдүн интегралдарына келтирилет.

3-эскертүү. 1) Эгерде $\int\sqrt{ax^2+bx+q}dx$ түрүндөгү интеграл берилсе, анда интеграл алдындагы функцияны $\sqrt{ax^2+bx+c}$ га көбөйтүп бөлсөк,

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

б.а. интеграл (18) түргө келет.

2) Ал эми $\int\frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($P(x)$ жана $Q(x)$ көп мүчөлөр интегралы берилсе, алдын ала $P(x)/Q(x)$ рационалдык бөлчөгүн жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратсак, анда интеграл жеңилирээк интегралдардын алгебралык суммасына ажырайт.

Мисалы 37. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}}$ интегралын чыгаргыла.

△ Интеграл алдындагы рационалдык бөлчөктү

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратабыз, андан кийин бөлүмдөн куткарып,

$$x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

мындан $A=-3$, $B=4$ коэффициенттерди аныктап, ордуна койсок

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}} = \int\left(-\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = -$$

$$= -3\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+4}} + 4\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4}}$$

жөнөкөй интегралдардын суммасына ажырайт. Биринчи интеграл $x-2=1/t$, экинчи интеграл $x-3=1/z$ алмаштыруулар аркылуу алынат. (Акырына дейре эсептөөнү өзүңөргө сунуш кылабыз).

4. Биномдук дифференциалдарды интегралдоо.

$$\int x^m(ax^n+b)^P dx, \ (a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \neq 0,\ P \neq 0) \qquad (23)$$

интегралы (мында a, b—чыныгы, m, n, p—рационалдык сандар) *биномдук дифференциалдык интегралы* деп аталат. Бул (23) интеграл үч гана учурда

1) $p \in Z$, 2) $\frac{m+1}{n} \in Z$, 3) $\frac{m+1}{n} - p \in Z$

акырына чейин интегралдана тургандыгын, башка учурда эч убакта акырына чейин интегралданбай тургандыгын П.Л.Чебышев* далилдеген.

---

*Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) улуу орус математиги жана механиги, академик.

Ошол үч учурларга токтолобуз:

1) Эгерде p — бүтүн сан болсо, анда m менен n дин жалпы орток бөлүмүн табабыз, ал r болсо, анда интеграл алдындагы туюнтма $R(x, \sqrt[r]{x})$ түргө келет. Бул учурда биномиалдык дифференциал $t = \sqrt[r]{x}$ алмаштыруусу аркылуу рационалдык түргө келет.

2) Жогорку (23) интегралга $z = x^n$ алмаштыруусун колдонолу.

$$\int x^m(b + ax^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a + bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Акыркы интегралга $\frac{m+1}{n} - 1 = q$ белгилөөсүн киргизели, анда

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a + bz)^p z^q dz. \qquad (24)$$

Эми $\frac{m+1}{n}$ саны же $q = \frac{m+1}{n} - 1$ бүтүн сан болуп, p — бөлчөгүнүн бөлүмү s болсун десек, берилген дифференциал $R(z, \sqrt[s]{a + bz})$ түргө келет.

Ошентип, бул учурда биномиалдык дифференциал $t = \sqrt[s]{a + bz} = \sqrt[s]{a + bx^n}$ алмаштыруусу аркылуу рационалдашат.

3) Алдыңкы (24) интегралды өзгөртүп, башка түргө келтирели,

$$\frac{1}{n}\int (a + bz)^p z^q dz = \frac{1}{n}\int z^{p+q}\left(\frac{a + bz}{z}\right)^p dz.$$

Эгерде $p + q$ саны бүтүн болсо, p нын бөлүмү s болсо, анда интеграл алды $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}}\right)$ түргө келет. Бул учурда интеграл алдын рационалдык функцияга келтириш үчүн $t = \sqrt[s]{\frac{a + bz}{z}} = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$ алмаштыруусун алуу жетиштүү.

Мисалы. 38. $J=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}$ **интегралын чыгаргыла.**

$\triangle$ Мында $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$ болгондуктан $\frac{m+1}{n}+p=-1$ бүтүн. Демек, үчүнчү учур. Анда $t=\sqrt{a/x^2+b}$, $x=\sqrt{a}\big/\sqrt{t^2+b}$, $dx=-\frac{\sqrt{a}tdt}{\sqrt{(t^2-b)^2}}$ болгондуктан

$$J=\int\left(-\frac{dt}{a}\right)=-\frac{t}{a}+C=-\sqrt{a/x^2+b/a}+C$$

жыйынтыгын алабыз. $\blacktriangle$

39. $J=\int x^5(1-x^2)^{-1/2}dx$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ Бул интегралда $m=5$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ болгондуктан $\frac{m+1}{n}=3$ — бүтүн, экинчи учур, анда

$$t=\sqrt{1-x^2},\ x=\sqrt{1-t^2},\ dx=-\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}};$$

Демек, $J=-\int(1-t^2)^2dt=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt=-t+\frac{2}{3}t^3-$

$$-\frac{t^5}{5}+C=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5}+C.\ \blacktriangle$$

40. $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-2}dx$ интегралы берилсин. $m=1$, $n=1/3$, $p=2$ — бүтүн, биринчи учур. Ал эми m жана n дин жалпы орток бөлүмү $r=3$. Демек, интеграл алдын $x=t^3$, $dx=3t^2dt$ алмаштыруусу рационалдаштырат, б.а. $x=t^3$, $dx=3t^2dt$ болгондуктан

$$\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-2}dx=3\int t^{-3}(1+t)^{-2}t^2dt=3\int\frac{dt}{t(1+t)^2};$$

интеграл алдын жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратып,

$$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{C}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2},$$

мындан $A=1$, $B=-1$, $C=-1$ коэффициенттерин табуу кыйын эмес.

Анда $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-2}dx = 3\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{1+t} - 3\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 3ln|t| -$

$$- 3ln|1+t| + \frac{3}{1+t} + C = ln\left|\frac{t^3}{(1+t)^3}\right| + \frac{3}{1+t} + C = ln\left|\frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^3}\right| + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + C.$$

5.Тригонометриялык функциялардыинтегралдоо.

1) $\int R(cosx,\ sinx)dx$ (25)

түрүндөгү интегралынын алдындагы туюнтманы рационалдык түргө келтирүүдө универсалдык деп аталуучу алмаштырууну колдонобуз.

$$t = tg\frac{x}{2},\ x \in]-\pi,\ \pi[. \tag{26}$$

Анда $cosx = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ sinx = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2},$

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

болгондуктан

$$\int R(cosx,\ sinx)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Интеграл алдындагы туюнтма рационалдык түргө келди.

Мисалы. 41. $\int \frac{dx}{sinx}$ жана $\int \frac{dx}{cosx}$ түрүндөгү интегралын эсептегиле.

△ а) (26) алмаштыруусун колдонсок,

$$\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{dt}{t} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C; \tag{27}$$

б) $\int \frac{dx}{cosx} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C = ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

же (27) формуланы колдонсок,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

же болбосо, дагы башка жолу

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right| + C. \ \blacktriangle$$

42. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ интегралын эсептегиле.

△ Алдынкы (26) колдонуп, жөнөкөйлөтсөк,

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2+tg\frac{x}{2}} + C$$

жыйынтыгын алабыз. ▲

Көпчүлүк учурларда универсалдын (26) подстановка интеграл алдын татаал рационалдык туюнтмага келтирип, аны эсептөө бир кыйла кыйынчылыктарды түзүүсү мүмкүн. Ошондуктан башка алмаштырууларга да көңүл буралы.

2) $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx$ же $\int R(tgx)dx$ интегралдарына $t = tgx$ алмаштыруусу ылайыктуу, анткени

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \ \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Демек, $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\, dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$,

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

интеграл алдындагы туюнтма рационалдашты.

Мисалы. 43. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ интегралын эсептегиле.

△ Жогорудагы алмаштыруу аркылуу

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1+t^2}{t^2}dt = \int dt + \int \frac{dt}{t^2} = tgx - ctgx + C.$$

Дагы бир ыкмасы, эгерде "тригонометриялык бирди" ($1 = sin^2x + cos^2x$) колдонсок, ошол эле төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз:

$$\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x} = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{cos^2x \cdot sin^2x} dx = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + C.$$

3) Интеграл алдындагы R функция төмөнкү шарттардын бирин канааттандырса:

а) $R(-sinx,\ cosx) = -R(sinx,\ cosx)$,

б) $R(sinx,\ -cosx) = -R(sinx,\ cosx)$,

в) $R(-sinx,\ -cosx) = R(sinx,\ cosx)$,

анда (25) интегралды эсептеш үчүн

$t = cos,\ x \in]0,\pi[;\ t = sinx,\ x \in]-\pi/2;\ \pi/2[;\ t = tgx,\ x \in]-\pi/2;\ \pi/2$

же $t = cos2x$ алмаштырууларын колдонобуз.

Атап айтканда: а) эгерде $R(sinx,\ cosx)$ туюнтмасы $sinx$ ти $(-sinx)$ ке алмаштырганда белгисин өзгөртсө (ал туюнтмада $sinx$ так даражада болсо), анда (25) интеграл $t = cosx$ алмаштыруусу аркылуу жеңил эле эсептелинет.

Мисалы. 44. $\int cos^4x\ sin^3xdx$ интегралын эсептеш керек болсун.

△ Бул учурда $\int cos^4x\ sin^3xdx = -\int cos^4x\ sin^2xd(cosx) =$

$$= \int t^4(1 - t^2)dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{cos^5x}{5} + \frac{cos^7x}{7} + C. ▲$$

45. $\int \frac{cos^2x}{sin^3x} dx$ интегралын эсептегиле.

△ Бул интегралды $\int \frac{cos^2x}{sin^3x} dx = \int \frac{cos^2x}{sin^4x} \cdot sinxdx = -\int \frac{t^2dt}{(1 - t^2)^2} =$

$$= -\frac{t}{2(1 - t^2)} - \frac{1}{4} ln\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + C = -\frac{cosx}{2sin^2x} - \frac{1}{2} ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C. ▲$$

4) Эгерде $R(sinx,\ cosx)$ туюнтмасы $cosx$ ти $(-cosx)$ ке алмаштырганда (ал туюнтмада $cosx$ так даражада болсо)

белгисин өзгөртсө, анда (25) интеграл алдындагы туюнтманы рационалдык функцияга келтирүү үчүн $t = sinx$ алмаштыруусун алуу керек.

Мисалы. $45'$. $\int \frac{sin^4 x}{cos^3 x} dx$ интегралын чыгаргыла.

△ Мында $cosx$ ти $(-cosx)$ ке алмаштырсак интеграл алдындагы туюнтма белгисин өзгөртөт. Анда $t = sinx$ алмаштыруусун алабыз. Мындан $x = arcsint,\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

$$\int \frac{sin^4 x}{cos^3 x} dx = \int \frac{t^4}{\sqrt{(1-t^2)^3}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^4}{\sqrt{(t^2-1)^2}} dt = \int \frac{(t^4-1)+1}{(t^2-1)^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^2-1} dt + \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \int \frac{(t^2-1)+2}{t^2-1} dt + \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} = \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2-1} +$$

$$+ \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} = t + ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{4} ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{t}{2(t^2-1)} + C = sinx - \frac{3}{4} ln\left|\frac{sinx+1}{sinx-1}\right| +$$

$$+ \frac{sinx}{2cos^2 x} + C = sinx - \frac{3}{2} ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{sinx}{2cos^2 x} + C. ▲$$

5) Ал эми $R(sinx,\ cosx)$ туюнтмасы, $sinx$ жана $cosx$ бир мезгилде $(-sinx)$ жана $(-cosx)$ ке алмаштырганда белгисин өзгөртпөсө, анда аны рационалдык функцияга келтирүү үчүн $t = tgx$ же $t = cos2x$ алмаштыруусун алуу ыңгайлуу.

Мисалы. 46. $\int \frac{sinxdx}{sinx + 3cosx}$ интегралын эсептегиле.

△ Интеграл алдын

$$\frac{sinx}{sinx + 3cosx} = \frac{sinx}{cosx(tgx+3)} = \frac{tgx}{tgx+3}$$

түрүндө өзгөртө алабыз жана $t = tgx,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$ маанилерин ордуна койсок, $\int \frac{sinxdx}{sinx + 3cosx} = \int \frac{tgx}{tgx+3} dx = \int \frac{t}{t+3} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{3}{10} \int \frac{dt}{t+3} +$

$$+ \frac{1}{10} \int \frac{3t+1}{t^2+1} dt = -\frac{3}{10} ln|t+3| + \frac{3}{20} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{3}{10} ln|t+3| +$$

$$+ \frac{3}{20} ln(t^2+1) + \frac{1}{10} arctgt + C = -\frac{3}{10} ln|tgx+3| - \frac{3}{10} ln(cosx) + \frac{1}{10} x + C.$$

жыйынтыгына келебиз. ▲

6) $\int R(tgx,\ ctgx)dx$ интегралын эсептөө талап кылынса, анда $t = tgx$ же $t = ctgx$ алмаштыруулары интеграл алдындагы туюнтманы рационалдык түргө келтирет. Чынында эле

$$x = arctgt \text{ же } x = arcctgt$$

болгондуктан, $dx = \frac{dt}{1+x^2}$ же $dx = -\frac{dt}{1+x^2}$ болот да, эки учурда тең интеграл алдындагы функция рационалдык функцияга келет.

Мисалы. 47. $\int \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx$ интегралын чыгаргыла.

$$\triangle \int \frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right| + C \ \blacktriangle$$

48. $\int \frac{1-ctgx}{1+ctgx}dx$ интегралын эсептегиле.

$$\triangle \int \frac{1-ctgx}{1+ctgx}dx = -\int \frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1-t)dt}{(1+t)(1+t^2)}.$$

Ал эми

$$\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+D}{1+t^2}.$$

Мындан $A = -1$, $B = 1$, $D = 0$. Демек, анда

$$\int \frac{1-ctgx}{1+ctgx}dx = ln|1+t| + \frac{1}{2}ln(1+t^2) + C = ln\left|\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{1+ctg^2x}}{1+ctgx}\right| +$$

$$+ C = ln\left|\frac{1}{sinx(1+ctgx)}\right| + C = -ln|sinx + cosx| + C \ \blacktriangle$$

7) Эми биз $\int sinmx \cdot cosnxdx$,

$\int sinmx \cdot sinnxdx$,

$\int cosmx \cdot cosnxdx$,

интегралдарын карайлы. Мында m жана n — бүтүн оң сандар. Бул интегралдар тригонометриядан бизге белгилүү болгон көбөйтүндүнү сумма аркылуу туюнтуучу төмөнкү формулалардын жардамы менен чыгарылат:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \begin{cases} \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x], & m \neq n, \\ \frac{1}{2}\sin 2nx, & m = n, \end{cases}$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \begin{cases} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], & m \neq n, \\ \frac{1}{2}[1 - \cos 2nx], & m = n, \end{cases}$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \begin{cases} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x], & m \neq n, \\ \frac{1}{2}[1 + \cos 2nx], & m = n. \end{cases}$$

Демек, анда

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right] + C, & m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2nx}{2n} + C, & m = n, \end{cases}$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + C, & m \neq n, \\ \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right] + C, & m = n, \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right] + C, & m \neq n, \\ \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right] + C, & m = n. \end{cases}$$

8) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ интегралын эсептеш үчүн төмөнкү (28) учурларга токтололу:

а) Эгерде m менен n бүтүн эмес рационалдык сандар болушса, анда интеграл алдындагы туюнтманы төмөндөгүчө

$$\int sin^m x\cdot cos^n xdx = \frac{1}{2}\int sin^{m-1}x(cos^2x)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\ sinx\cdot cosxdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (sin^2x)^{\frac{m-1}{2}}(1-sin^2x)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\cdot sinx\cdot cosxdx$$

түзүп, $t = sin^2x$ алмаштыруусун колдонсок, (23) формуладагыдай

$$\int sin^m x\ cos^n xdx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt$$

дифференциалдык интегралдын биномуна келет. Ал интегралды биз үйрөнгөнбүз.

б) Эгерде m менен n бүтүн сандар болуп, жок дегенде бири $m = 2\kappa+1$, $(n = 2\kappa+1)$ так болсо, анда $t = cosx$, $(t = sinx)$ алмаштыруусу ылайык,

$$\int sin^{2\kappa+1}x\ cos^n xdx = -\int (1-cos^2x)^\kappa cos^n xd(cosx) = -\int (1-t^2)^\kappa t^n dt.$$

Интеграл алды рационалдашты.

в) Эгерде m менен n экөө тең оң жана жуп (же бири нөл болушу мүмкүн) болсо, анда

$$sin^2x = \frac{1-cos2x}{2},\ cos^2x = \frac{1+cos2x}{2},\ sinx\cdot cosx = \frac{1}{2}sin2x,$$

формулаларын колдонуп, даражаларды кичирейте берүү ылайык.

Мисалы. 49. $\int sin^4x\ cos^4xdx$ интегралын эсептегиле.

$$\triangle \int sin^4xcos^4xdx = \frac{1}{16}\int (2sinx\ cos)^4dx = \frac{1}{16}\int (sin2x)^4dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{1-cos4x}{2}\right)^2dx = \frac{1}{64}\int (1-2cos4x+cos^24x)dx =$$

$$\frac{1}{64}\left[x-\frac{2sin4x}{4}+\frac{1}{2}\int (1+cos8x)dx\right] = \frac{1}{64}\left[x-\frac{sin4x}{2}+\frac{x}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{cos8x}{16}\right]+C = \frac{1}{1024}[24x-8sin4x+sin8x]+C. \blacktriangle$$

6. Тригонометриялык функциялар үчүн рекуренттик формулалар.

1) Биз $\int x^n \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$ интегралдарын эсептеш үчүн, бул эки интегралды байланыштыра турган рекуренттик формулаларды алалы. Чынында эле

$$\int x^n \cos x dx = \int x^n d(\sin x) = x^n \sin x - \int \sin d(x^n),$$

же

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x dx. \tag{29}$$

Ушул сыяктуу

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x dx \tag{30}$$

формуласын алабыз.

Мисалы. 50. $\int x^3 \sin x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Чыгарыш үчүн (29) жана (30) формулаларды колдонобуз, анда

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x dx = -x^3 \cos x + 3\sin x \cdot x^2 -$$

$$-6\int x \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6\int \cos x dx = -$$

$$-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6\sin x + C$$

жыйынтыгын алабыз. ▲

2) Жогоруда

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \tag{28}$$

интегралын карап, бул жолу m менен n оң жана терс бүтүн сандар болсун деп рекуренттик формуланы чыгаралы.

Ал үчүн ар кандай a жана b сандар үчүн

$$d[\cos^a x \sin^b x] = (-a\cos^{a-1} x \sin^{b+1} x + b\cos^{a+1} x \sin^{b-1} x)dx$$

дифференциалы орун алат. Бул дифференциалдагы

$$\cos^{a+1} x = \cos^{a-1} x \cos^2 x = \cos^{a-1} x(1-\sin^2 x)$$

деп өзгөртүп түзүп, ордуна койсок

$$d[\cos^a x \sin^b x] = [-(a+b)\cos^{a-1} x \sin^{b+1} x + b\cos^{a-1} x \sin^{b-1} x)dx$$

барабардыгын алабыз. Акыркы барабардыктын эки жагын интегралдап,

$$\cos^a x\ \sin^b x = -(a+b)\int \cos^{a-1} x\ \sin^{b+1} x dx + b\int \cos^{a-1} x\ \sin^{b-1} x dx$$

келип чыккан жыйынтыкка $a-1=n$, $b+1=m$ деп, ордуна коюп аныктасак,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx \quad (31)$$

рекуренттик формуласын алабыз.

Эгерде (31) формулага $n=0$ десек, анда

$$\int \sin^m x dx = -\frac{1}{m}\cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx, \ (m \neq 0) \quad (32)$$

рекуренттик формуласын алабыз.

Бул (32) формула $m>0$ үчүн ылайыктуу жана ал интегралды $m=0$ чейин (m — жуп болсо) же $m=1$ чейин (m — так болсо) эсептөөгө болот, ал эми $m<0$ үчүн

$$\int \frac{dx}{\sin^\kappa x} = -\frac{\cos x}{(\kappa-1)\sin^{\kappa-1} x} + \frac{\kappa-2}{\kappa-1}\int \frac{dx}{\sin^{\kappa-2} x}, \ (\kappa \neq 1) \quad (33)$$

рекуренттик формуласына ээ болобуз.

Эгерде (32) формулага $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ колдонсок, анда

$$\int \cos^m x dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x dx \quad (34)$$

формуласын алабыз жана бул формуланы ар кандай $m>0$ үчүн колдонобуз. Ал эми $m<0$ үчүн

$$\int \frac{dx}{\cos^\kappa x} = \frac{\sin x}{(\kappa-1)\cos^{\kappa-1} x} + \frac{\kappa-2}{\kappa-1}\int \frac{dx}{\cos^{\kappa-2} x}, \ (\kappa \neq 1) \quad (35)$$

рекуренттик формула орун алат.

Ошентип, (31) рекуренттик формула (28) интегралды ар кандай $m \geq 0$, $n \geq 0$ үчүн чыгаруу жетиштүү, анткени ал $\int \cos^n x dx$ интегралына чейин (m — жуп болсо), же $\int \cos^n x \sin x dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C$ интегралына чейин (m — так болсо) эсептелинет. Ал эми терс m же n үчүн формуланы тескери багытта колдонсок болот.

Мисалы. 51. $\int cos^6 x dx$ **интегралын эсептегиле.**

$\triangle$ **(34) формуланын негизинде**

$$\int cos^6 x dx = \frac{sinx \cdot cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}\int cos^4 x dx,$$

$$\int cos^4 x dx = \frac{sinx \cdot cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int cos^2 x dx,$$

$$\int cos^2 x dx = \frac{sinx \cdot cosx}{2} + \frac{1}{2}x.$$

Демек,

$$\int cos^6 x dx = \frac{1}{6} sinx\ cos^5 x + \frac{5}{6 \cdot 4} sinx\ cos^3 x +$$

$$+ \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} sinx \cdot cosx + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} x + C. \blacktriangle$$

52. $\int \frac{dx}{cos^3 x}$ **интегралын чыгаргыла.**

$\triangle$ **(35) формуланын негизинде**

$$\int \frac{dx}{cos^3 x} = \frac{sinx}{2cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{cosx} = \frac{sinx}{2cos^2 x} + \frac{1}{2} ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

акыркы интегралдын чыгарылышын 41-мисалдан карагыла. $\blacktriangle$

3) $\int tg^n x dx$ жана $\int ctg^n x dx$

интегралынын чыгарылыштарына көңүл буралы. Мында $n>1$ бүтүн оң сан. Мындай интегралдарды чыгарууда, интеграл алдынан $tg^2 x$ (же $ctg^2 x$) көбөйтүндүнү бөлүп алып, аны

$$tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} - 1 \text{ (же } ctg^2 x = \frac{1}{sin^2 x} - 1)$$

барабардыктары менен алмаштырышат:

$$\int tg^n x dx = \int tg^{n-2} x tg^2 x dx = \int tg^{n-2} x\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{tg^{n-2} x dx}{cos^2 x} - \int tg^{n-2} x dx$$

же

$$\int tg^n x dx = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2} x dx. \qquad (36)$$

Ушул сыяктуу эле

$$\int ctg^n x dx = \frac{ctg^{n-1}x}{n-1} - \int ctg^{n-2} x dx \qquad (37)$$

рекурентттик формулаларды алабыз, жана алар интеграл алдындагы tgx менен $ctgx$ тин даража көрсөткүчүн дароо 2ге төмөндөтөт. Демек, бул формулаларды кайра-кайра колдонуп отуруп аны акырына чейин интегралдоого болот.

Мисалы. 53. $\int tg^5 x dx$ жана $\int ctg^8 x dx$ интегралын эсептегиле.

△ Жогорку (36), (37) формулалар боюнча

а) $\int tg^5 x dx = \frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x - ln|cos\ x| + C,$

б) $\int ctg^8 x dx = -\frac{1}{7} ctg^7 x - \int ctg^6 x dx = -\frac{1}{7} ctg^7 x + \frac{1}{5} ctg^5 x +$

$+ \int ctg^4 x dx = -\frac{1}{7} ctg^7 x + \frac{1}{5} ctg^5 x - \frac{1}{3} ctg^3 x - \int ctg^2 x dx = -$

$-\frac{1}{7} ctg^7 x + \frac{1}{5} ctg^5 x - \frac{1}{3} ctg^3 x + ctgx + C.$ ▲

Акырында кээ бир тригонометриялык функцияларды интегралдоодогу ыкмаларга токтолуп кетмекчибиз:

а) Эгерде $\int \frac{1}{cos^{2k} x \cdot sin^{2m} x} dx$ (k, m — натуралдык сандар), түрүндөгү интегралдар берилсе, алымына ылайыктуу даражадагы "тригонометриялык бирди" колдонуу жетиштүү.

Мисалы. 54. $\int \frac{1}{cos^4 x \cdot sin^2 x} dx$ интегралын чыгаргыла.

△ Алымына "Тригонометриялык бирдин" экинчи даражасын колдонолу.

$$\int \frac{dx}{cos^4 x \cdot sin^2 x} = \int \frac{(sin^2 x + cos^2 x)^2}{cos^4 x \cdot sin^2 x} dx = \int \frac{sin^4 x + 2 sin^2 x \cdot cos^2 x + cos^4 x}{cos^4 x \cdot sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{sin^2 x}{cos^4 x} dx + 2\int \frac{dx}{cos^2 x} + \int \frac{dx}{sin^2 x} = \int tg^2 x \cdot \frac{dx}{cos^2 x} + 2tgx - ctgx =$$

$$= \int tg^2 x d(tgx) + 2tgx - ctgx = \frac{1}{3} tg^3 + 2tgx - ctgx + C. \ ▲$$

б) Ал эми $\int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2m} x} dx$ жана $\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin^{2k} x} dx$ (k, m — натуралдык сандар), интегралдары берилсе, анда аларды эсептеш үчүн синус менен косинустун катышынын бирдей даражасын бөлүп, анан тангенске (котангенске) өтүү керек.

Мисалы. 55. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ интегралын чыгаргыла.

△ Алдыдагы айтылгандай

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x(1 + tg^2 x) d(tgx) =$$
$$= \int (tg^2 x + tg^4 x) d(tgx) = \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x + C. \blacktriangle$$

в) Эгерде $\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} dx$ жана $\int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} dx$ (n — бүтүн оң сан). интегралдарын чыгаруу үчүн б) пункту сыяктуу эле тангенске жана котангенске же $t = tgx$, $t = ctgx$ алмаштырууларын колдонуу жетиштүү.

Мисалы. 56. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ интегралын эсептегиле.

$$\triangle \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^3 x d(tgx) = \frac{1}{4} tg^4 x + C. \blacktriangle$$

г) Ал эми

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x}$$

интегралы кезиксе жана даража көрсөткүчтөрүнүн суммасы $m + n = 2k$ жуп санды берсе, анда интеграл алдындагы функциянын алымын жана бөлүмүн мүчөлөп $\cos^{2k} x$ (же $\sin^{2k} x$) бөлүп, анын тангенске (же котангенске) өтүүсү жетиштүү.

Мисалы. 57. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^3 x}$ интегралын чыгаргыла.

△ Мында $m = 3$ жана $n = 3$ ал эми $m + n = 6$. Ошондуктан, интеграл алдындагы функциянын алымын жана бөлүмүн мүчөлөп, $\cos^6 x$ ке бөлүп тангенске өтөбүз.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}=\int \frac{\frac{dx}{\cos^6 x}}{tg^3 x}=\int tg^{-3}x\cdot\sec^4 x d(tgx)=\int tg^{-3}x(1+$$

$$+2tg^2x+tg^4x)d(tgx)=\int tg^{-3}xd(tgx)+2\int tg^{-1}d(tgx)+$$

$$+\int tgxd(tgx)=-\frac{1}{2tg^2x}+2ln|tgx|+\frac{1}{2}tg^2x+C. \blacktriangle$$

7. $R(e^x)$ жана $R\left(\sqrt[n]{e^{ax}+b}\right)$ функцияларын интегралдоо

$$\int R(e^x)dx \text{ жана } \int R\left(\sqrt[n]{e^{ax}+b}\right)dx,\ (a>0) \qquad \textbf{(38)}$$

интегралдары берилсин.

Мындай интегралдардын алдындагы туюнтманы рационалдык функцияга келтирүү үчүн $t=e^x$ жана $t=\sqrt[n]{e^{ax}+b}$ алмаштыруулары жетиштүү жана бул интегралдар аягына дейре эсептелинет.

Мисалы. 58. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ $t=e^x$ алмаштыруусун колдонсок, анда $dx=\frac{dt}{t}$. Демек,

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t}dt=2\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{dt}{t}=$$

$$=2ln|t+1|-ln|t|+C=2ln(e^x+1)-x+C. \blacktriangle$$

59. $\int \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}dx$ интегралын чыгаргыла.

$\triangle$ $t=\sqrt{1+e^x}$ деп белгилеп, мындан $e^x=t^2-1$ же $x=ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2tdt}{t^2-1}$.

Анда $\int \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}dx=\int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int \frac{tdt}{(t+1)^2}=2\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}dt=$

$$= 2\int\frac{dt}{t+1} - 2\int\frac{dt}{(t+1)^2} = 2ln|t+1| + \frac{2}{t+1} + C =$$

$$= 2ln(\sqrt{1+e^x}+1) + \frac{2}{\sqrt{1+e^x}+1} + C. \blacktriangle$$

8. Гиперболалык функциялардын интегралданышы.

Биз
$$\int R(shx,\ chx)dx \tag{39}$$
интегралын карайлы. $R(u,\ v)$ рационалдык функция. Мындай интегралды рационалдаш үчүн
$$t = th\frac{x}{2}$$
алмаштыруусун алсак болот. Чынында эле
$$shx = \frac{2t}{1-t^2},\ chx = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$
болгондуктан
$$\int R(shx,\ chx)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\ \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Кээде, берилген мисалдарга ылайык $t = shx$, $t = chx$, $t = thx$, $t = ch2x$ алмаштыруулары жана бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонуу максатка тез жеткизиши мүмкүн. Ал эми
$$\int sh^m x ch^n x dx$$
m менен n рационалдык сандар, $t = shx$ $(t = chx)$ алмаштыруусу аркылуу дифференциалдык биномдун интегралына келет.

Мисалы. 60. $\int ch^5 x\cdot sh^4 x dx$ интегралын эсептегиле.

$\triangle$ $ch^2x = 1 + sh^2x$, $chxdx = d(shx)$ болгондуктан $sht = t$ алмаштыруусун алабыз. Анда
$$\int sh^4x\cdot ch^5xdx = \int(1+t^2)^2t^4dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= sh^5x\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7}sh^2x + \frac{1}{9}sh^4x\right) + C. \blacktriangle$$

Кээде (38) түрүндөгү интегралга келтирип, интеграл алсак да болот.

Мисалы. 61. $\int shxdx$ жана $\int thxdx$ интегралынын чыгарылыштарын көрөлү.

△ а) $\int shxdx = \frac{1}{2}\int (e^x - e^{-x})dx = \frac{1}{2}\int\left(t - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2} =$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + C = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + C = chx + C;$$

б) $\int thxdx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 - 1}{t^3 + t}dt =$

$$= \int \frac{t^2 - 1}{t(1 + t^2)}dt = \int\left(\frac{A}{t} + \frac{B + Ct}{1 + t^2}\right)dt = \int\left(-\frac{1}{t} + \frac{2t}{1 + t^2}\right)dt = -$$

$$-\int\frac{dt}{t} + \int\frac{d(1 + t^2)}{1 + t^2} = -ln|t| + ln|1 + t^2| + C = ln\left|\frac{1 + t^2}{t}\right| + C =$$

$$= ln\left|\frac{1}{t} + t\right| + C = ln(e^x + e^{-x}) + C = lnchx + C'. \blacktriangle$$

Эскертүү. Алдынкы интегралды жөнөкөй эле чыгарсак болот.

$$\int thxdx = \int\frac{shx}{chx}dx = \int\frac{d(chx)}{chx} = lnchx + C'.$$

9. Элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган интегралдар.

Биз түрдүү элементардык функциялардын класстарын карап, алардын баштапкы функцияларын аныктап, ал баштапкы функциялар элементардык функциялар аркылуу туюнтмаларын көрдүк.

Бирок, бардык эле элементардык функциялардын баштапкы функциялары элементардык функциялар боло бербейт. Мындай учурга биз дифференциалдык биномдун интегралында кездештик. Ал учурда интеграл алдындагы функция элементардык (иррационалдык) болгону менен интеграл акырына дейре дайыма эле чыгарыла бербейт.

Демек,

$$\int\frac{e^x}{x^n}dx,\ \int\frac{sinx}{x^n}dx,\ \int\frac{cosx}{x^n}dx,\ n\in N$$

интегралдары элементардык функциялар аркылуу туюнтулбай тургандыгын көрсөтүүгө болот.

Элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган, бирок математикалык анализде жана анын ар түрдүү колдонулуштарында чоң мааниге ээ болгон элементардык функциялардын интегралдары бар. Аларга

а) $\int e^{-x^2}dx$ — Пуассондун интегралы;

б) $\int \sin x^2 dx$ жана $\int \cos x^2 dx$ — Френелдин интегралдары;

в) $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегралдык логарифм;

г) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ — интегралдык синус;

д) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ — интегралдык косинус

жана да эллиптикалык интегралдар деп аталуучу

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)dx$$

интегралдар кирет. Мында $P(x)$ үчүнчү же төртүнчү даражадагы көп мүчө. Жалпы учурда бул интегралдар элементардык функциялар аркылуу туюнтулбайт. Өзгөчө, дайыма кездешүүчү

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}} \text{ жана } \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},\ 0<\kappa<1,$$

интегралдар $x=\sin\varphi$ алмаштыруусу аркылуу

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}} \text{ жана } \int \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

интегралдардын комбинациясына келтирилет. Булар Лежандр* түрүндөгү *биринчи* жана *экинчи типтеги эллиптикалык интегралдар* деп аталышат.

---

*А.Лежандр (1752–1853) — француз математиги.

КӨНҮГҮҮЛӨР

1) $\int (4x^{1.4} + 5x^{-1.2} + 6x^{-0.2} - 1)dx.$ Жообу: $\frac{5}{3}x^{2.4} + 25x^{-0.2} + \frac{15}{2}x^{0.8} - x + C.$

2) $\int \left(7x^2 + \frac{5}{x^4} + \sqrt{x}\right)dx.$ Жообу: $\frac{7}{3} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

3) $\int \frac{x^3 - 2x^5 + 1}{x^4}dx.$ Жообу: $ln|x| - x^2 - \frac{1}{3x^3} + C.$

4) $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx.$ Жообу: $\frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^{\frac{9}{2}} + \frac{3}{2}x^2 - 2x^{-1/2} + C.$

5) $\int \left(cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2}\right)^2 dx.$ Жообу: $x - cosx + C.$

6) $\int \sqrt[3]{2x - 3}dx.$ Жообу: $\frac{3}{8}(2x - 3)^{\frac{4}{3}} + C.$

7) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}.$ Жообу: $2\left(\sqrt{x + 1} - ln\left(1 + \sqrt{x + 1}\right)\right) + C.$

8) $\int \frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x}dx.$ Жообу: $\frac{2}{3}(tgx)^{3/2} + C.$

9) $\int ln(x + a)dx.$ Жообу: $(x + a)ln|x + a| - x + C.$

10) $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1 + x^2}}dx.$ Жообу: $\sqrt{1 + x^2}arctg - ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + C.$

11) $\int sin\sqrt{x}dx.$ Жообу: $2\left(sin\sqrt{x} - \sqrt{x}cos\sqrt{x}\right) + C.$

12) $\int \frac{x^3 - 7x + 18}{x^2 - 3x + 2}dx.$ Жообу: $\frac{x^2 + 6x}{2} + 12ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right| + C.$

13) $\int \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}dx.$ Жообу: $ln\sqrt[4]{\frac{(x - 5)^7}{(x - 1)^3}} + C.$

14) $\int \frac{x^2}{(x + 2)^2(x + 1)}dx.$ Жообу: $\frac{4}{x + 2} + ln|x + 1| + C.$

15) $\int \frac{x}{(x + 1)(x^2 + 1)}dx.$ Жообу: $\frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{4}ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2}ln|x +$

$+ 1| + C.$

16) $\int \frac{3x+5}{x(x^2+1)^2}dx$ Жообу: $5\ln|x|-\frac{5}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+5}{2(1+x^2)}+$

$+3/2\,arctgx+C.$

17) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx.$ Жообу: $3/2\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C.$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ Жообу: $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$

19) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$ Жообу: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{}{4\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+C.$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}.$ Жообу: $3\left(arctg\sqrt[6]{x}-\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)+C.$

21) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx.$ Жообу: $\ln(1+\sin x)+C.$

22) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$ Жообу: $\ln|tgx|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$

23) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx.$ Жообу: $-\frac{1}{3}ctg^3 x+C.$

24) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx.$ Жообу: $\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

25) $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}}.$ Жообу: $C-\sqrt{1+e^{-2x}}.$

26) $\int \cos x\cos 3x dx.$ Жообу: $\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

27) $\int \cos 3x\cdot\cos 4x dx.$ Жообу: $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{14}\sin 7x+C.$

28) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx.$ Жообу: $-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x+C.$

29) $\int ctg^4 x dx.$ Жообу: $-\frac{1}{3}ctg^3 x+ctgx-x+C.$

30) $\int \cos^3 x\sin^8 x dx.$ Жообу: $-\frac{1}{11}\sin^{11}x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$

VII ГЛАВА

АНЫК ИНТЕГРАЛ

§ 1. АНЫК ИНТЕГРАЛДЫН АНЫКТАМАСЫ ЖАНА ЖАШОО ШАРТТАРЫ

1. Анык интеграл түшүнүгүнө алынып келүүчү маселелер.

а) *Ийри сызыктуу трапециянын аянты.* $f(x)$ функциясы $\Delta = [a, b]$ аралыгында аныкталып жана $f(x) \geq 0$ болсун. $x = a$, $x = b$, $y = 0$ түз сызыктар жана $f(x)$ функциясынын графиги менен чектелген

$$G = \{(x,y): a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

фигураны *ийри сызыктуу трапеция* деп айтабыз.

Δ аралыгын $x_i (i = \overline{1,n})$ чекиттери менен n бөлүккө бөлөбүз, мында $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$ жана ушул чекиттер аркылуу Oy огуна жарыш түз сызыктар жүргүзөбүз. Анда G фигурасы n бөлүккө бөлүнөт. Анын ар бир бөлүгү майда ийри сызыктуу трапецияны түзөт.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ x_0 = a,\ x_n = b \text{ жана } \forall \xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

Анда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

суммасы Δ аралыгын бөлүштүрүүдөн жана ξ_i чекиттерин тандап алгандан көз каранды болуп n төрт бурчтуктардан турган тепкичтүү фигуранын аянтына барабар; i-төрт бурчтуктун негизи $[x_{i-1}, x_i]$ кесиндиси, ал эми бийиктиги $f(\xi_i)$

болот. Майда бөлүштүрүүдө тепкичтүү фигура алгачкы G фигурасынан аз айырмаланат. Эң чоң кесиндинин узундугу λ нөлгө умтулгандай кылып бөлүштүрүү чекитин көбөйтөбүз. Эгерде ушул учурда σ сумма Δ аралыгын бөлүштүргөнгө жана ξ_i чекиттерин тандаганга карабастан S пределине ээ болсо, анда G фигуранын аянты S ке барабар.

Мисалы: $y = x^2$ параболасы жана $x = a$ жана $y = 0$ кесиндилери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла. $y = x^2$ үзгүлтүксүз, анда σ суммасы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

же

$$\sigma = \frac{a^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

мындан $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma = a^3/3$. Ошондуктан изделүүчү аянт $\frac{a}{3}$ барабар.

б) *Өзгөрмөлүү күчтүн жумушу.* Материалдык чекит p күчтөрүнүн аракети ox сан огунун багыты боюнча кыймылдасын жана күчтүн багыты менен чекиттин кыймылдоо багыты дал келсин. Анда p күчү x тен үзгүлтүксүз функция болот. Биз материалдык чекит $x = a$ дан $x = b$ га чейин жылганда p күчүнүн жумушун аныктайбыз. $[a, b]$ аралыгын, мурункудай эле x_i чекиттери аркылуу бөлөбүз жана $\xi_i \in \Delta_i (i = \overline{1, n-1})$ тандайбыз. Бул учурда p күчүнүн Δ_i аралыгында жумушу болжол менен $p(\xi_i)\Delta x_i$ барабар. Ал эми $[a, b]$ аралыгында бул күчтүн жумушу болжол менен $\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta x_i$ барабар. Бул сумманын пределин өзгөрмөлүү күчтүн материалдык чекитинин a чекитинен b чекитине жылгандагы анын жумушу дейбиз.

Каралган мисалдарда $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ түрүндөгү сумманын пределин табуу жөнүндө сөз болду, бул сумманы интегралдык сумма деп айтабыз, анын пределин табуу маселеси бардык тараптан изилдөөнү талап кылат.

2. Анык интеграл түшүнүгү.

Бир аргументтүү $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында аныкталсын жана $x_i (i = \overline{0, n})$ $[a, b]$ кесиндинин чекиттеринин жыйындысы болсун. Ушул чекиттердин жыйындысын $[a, b]$ кесиндисинин бөлүштүрүүсү деп, аны $T = \{x_i, \ i = \overline{0, n}\}$ аркылуу белгилейли, $\Delta_i = [x_{i-1}, \ x_i]$ кесиндилерди $i = 1, \ ..., \ n$, T бөлүштүрүүнүн кесиндилери деп айтабыз. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. T бөлүштүрүүнүн i-кесиндинин узундугу. $l(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ санын T бөлүштүрүүнүн диаметри деп айтабыз. Эгерде $\xi_i \in \Delta x_i$ болсо, анда ξ_i чекиттеринин жыйындысын тандалма деййбиз жана $\xi = \{\xi_i; \ i = 0, 1, \ ..., \ n-1\}$ аркылуу белгилейбиз.

Сумма
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_T(\xi, \ f) = \sigma_T(\xi) \qquad (1)$$
берилген бөлүштүрүүдө жана турактуу тандалмада ξ, $f(x)$ функциясынын интегралдык суммасы деп аталат.

Аныктама. *Эгерде берилген $\forall \varepsilon > 0$ үчүн $\delta = \delta(\xi) > 0$ саны жашап, каалагандай бөлүштүрүүнүн T диаметри $l(T) < \delta$ болгондо каалагандай тандалмада ξ үчүн*
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \varepsilon$$
барабардыгы аткарылса, анда J саны $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисинде анык интегралы деп аталат жана $\int_a^b f(x)dx$ деп белгиленет.

Символдун жардамы менен бул аныктаманы
$$\Big\{ J = \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0; \ \forall T: l(T) < \delta(\varepsilon)$$

$$\forall\varepsilon \rightarrow \left|\sigma_T(\xi,\ f) - J\right| < \varepsilon\} \qquad (2)$$

же (2) туюнтманы кыскача $\sigma_T(\xi) \to J$, $l(T) \to 0$ же $\lim\limits_{l\to 0}\sigma_T(\xi) = J$ түрүндө да жазабыз.

Бул (2) шарты менен аныкталган J саны жашаса, анда $f(x)$ $[a,\ b]$ кесиндисинде интегралдануучу (Риман боюнча) функция деп аталат жана $f(x)$ функциясынын $[a,\ b]$ аралыгында интегралы жашайт дейбиз.

3. Функциянын интегралдануучулугунун зарыл шарты.

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде интегралдануучу болсо, анда ал ушул аралыкта чектелген.*

○ $f(x)$ $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсун дейли. Анда (2) шартын канааттандыруучу J саны жашайт. (2) барабардыгында $\varepsilon = 1$ десек,

$$J - 1 < \sigma_T(\xi,\ f) < J + 1 \qquad (3)$$

барабарсыздыгы каалагандай ξ тандалмада аткарылат. Эгерде $l(T) \to 0$ бөлүштүрүүнү турактуу десек, $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде чектелбеген болот, же эң жок дегенде T бөлүштүрүүнүн Δ_i кесиндисинде чектелбеген функция. Жалпылыгын бузбастан $f(x)$ функциясы $\Delta_1[a_1,\ b_1]$ кесиндисинде чектелбесин деп болжолдойлу $(b_1 = x_1)$. Ошентип $\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ турактуу чекиттер болсун, мында $\xi_i \subset \Delta_i$, $i = 2,\ \ldots,\ n$, сумманы $A = \sum\limits_{i=2}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ деп белгилейлик. Анда $\sigma_T = A + f(\xi_1)\Delta x_1$ жана (3) негизинде

$$J - 1 < f(\xi_1)\Delta x_1 < J + 1 \qquad (4)$$

барабарсыздыгы $\forall\xi_1 \in \Delta_1$ үчүн аткарылат. $\Delta x_1 > 0$ болгондуктан (4) кош барабарсыздыгы төмөнкүгө тең күчтүү:

$$\frac{1}{\Delta x_1}(J - 1 - A) < f(\xi_1) < \frac{1}{\Delta x_1}(J + 1 - A).$$

Мындан $f(x)$ функциясынын $[a_1, b_1]$ кесиндисинде чектелгендиги келип чыгат. ●

4. Дарбунун суммалары жана анын касиеттери.

Берилген $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде аныкталсын жана чектелген болсун жана $T = \{x_i:\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ $[a, b]$ кесиндисинин бөлүштүрүүсү $\Delta_i = [x_{i-1}, x]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$,

$$M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),\ m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x),$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,\ s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i. \tag{5}$$

S_T, s_T ирети менен $f(x)$ функциясы үчүн берилген T бөлүштүрүүдө *Дарбунун жогорку* жана *төмөнкү суммалары* деп аталат. Дарбунун суммаларынын касиеттерин карайбыз.

1⁰ $\forall\xi$ үчүн

$$s_T \leqslant \sigma_T(\xi) \leqslant S_T \tag{6}$$

барабарсыздыгы орун алып,

$$\forall\xi_i \in \Delta_i,\ m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$$

аткарылат, анда

$$m_i\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)x_i \leqslant M_i\Delta x_i.$$

Бул барабарсыздыктарды суммалайбыз, анда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i. \tag{7}$$

Дарбунун жана интегралдык суммалардын аныктамалары боюнча (6), (7) тең күчтүү.

2⁰

$$S_T = \sup_{\xi} S(\xi), \tag{8}$$

$$s_T = \inf_{\xi} s(\xi) \tag{9}$$

орун алышат.

○ Биз (8) барабардыгын далилдейлик. Накта жогорку чектин аныктамасы боюнча төмөнкү шарттар орун алышын көрсөтөбүз, $\sigma_T(\xi)\leqslant s_T$, $s_T-\sigma_T(\xi)<\varepsilon$. (6) негизинде биринчиси келип чыгат. Экинчи шартын далилдейли. $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x)$ болгондуктан накта жогорку чектин аныктамасы боюнча

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\xi_i'=\xi_i'(\xi)\in\Delta_i:0\leqslant M_i-f(\xi_i)<\frac{\varepsilon}{b-a},\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

i-барабарсыздыкты Δx_i көбөйтүп алынган барабарсыздыкты суммалайбыз,

$$0\leqslant s_T-\sigma_T(\xi')<\varepsilon,$$

мында $\xi'=\{\xi'\colon i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ тандоо.

Ошентип (8) шарты далилденди. (9) барабарсыздыгы ушуга окшош эле далилденет. ●

Эгерде T_1 бөлүштүрүүнүн ар бир чекити T_2 бөлүштүрүүнүн чекити болсо, анда T_2 бөлүштүрүүнү T_1 бөлүштүрүүнүн уландысы деп аташат. Башкача айтканда T_2 бөлүштүрүү T_1 бөлүштүрүүгө дал келет же T_2, T_1 ден жок дегенде бир чекит кошуу жолу менен алынат.

3^0 Эгерде T_2 бөлүштүрүүсү T_1 бөлүштүрүүсүнүн уландысы болсо, анда

$$s_{T_1}\leqslant s_{T_2}\leqslant S_{T_1}\leqslant S_{T_2}, \qquad (10)$$

б.а. бөлүштүрүүнү майдалаганда Дарбунун төмөнкү суммасы кемибейт, ал эми жогоркусу чоноййбойт.

○ T_2 бөлүштүрүүсү T_1 ден бир $x'\in(x_{i-1},\ x_i)$ чекит кошуу жолу менен алынсын. x' чекити Δ_i кесиндисин Δ_i', Δ_i'' кесиндилеринде болсун жана бул кесиндилердин узундугун λ_1 жана λ_2 менен белгилейли, анда $\Delta x_i=\lambda_1+\lambda_2$. $m_i'=\inf\limits_{x\in\Delta_i'}f(x)$, $m_i''=\inf\limits_{x\in\Delta_i''}f(x)$ болот. Көрүнүп тургандай $m_i'\geqslant m_i$, $m_i''\geqslant m_i'$. S_{T_1}, S_{T_2} суммаларда Δ_i туура келүүчү кошуучулардан башкалары дал келишет. Ошондуктан $S_{T_2} - S_{T_1} = m_i' \lambda_1 + m_i'' \lambda_2 - m_i(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Демек

$$S_{T_2} - S_{T_1} = (m_i' - m_i)\lambda_1 + (m_i'' - m_i)\lambda_2 \geq 0.$$

Ушуга окшош эле $s_{T_1} \leq s_{T_2}$ барабарсыздыгы далилденет. ●

4^0. Каалагандай бөлүштүрүүчүлөр T' жана T'' үчүн

$$s_{T'} \leq s_{T''} \tag{11}$$

барабарсыздыгы орун алат.

○ T бөлүштүрүүсү T' жана T'' бөлүштүрүүлөрүнүн уландысы болсун. $T_1 = T'$, $T_2 = T$ болгондо (10) барабарсыздыгынан $S_{T'} \leq s_{T} \leq S_T$ келип чыгат. $T_2 = T$ жана $T_1' = T''$ болгондо (10) барабарсыздыгынан $s_{T'} \leq S_{T''}$ алабыз.

Алынган барабарсыздыктарды бириктирип $s_{T'} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T''}$, мындан (11) барабарсыздыгы келип чыгат. ●

5^0. Каалагандай $[a, b]$ кесиндилерин бөлүштүрүүчүлөрү T' жана T'' үчүн

$$S_{T'} \leq \underline{J} \leq J \leq S_{T''} \tag{12}$$

шартын канааттандыруучу $\underline{J} = \sup\limits_{T} s$, $J = \inf\limits_{T} S$ сандар $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисиндеги ирети менен Дарбунун төмөнкү жана жогорку интегралдары деп аталат.

(11) барабарсыздыгы боюнча $\underline{J} = \sup s_T$ жана $\bar{J} = \inf S_T$ чыгат жана каалагандай T' жана T'' бөлүштүрүүчүлөрү үчүн (12) барабарсыздыгы орун алат.

Акырында $1^0 - 5^0$ касиеттери каалагандай $[a, b]$ кесиндилеринде чектелген функция үчүн орун аларын белгилеп кетебиз.

5. Функциянын интегралдануучулугу

2-теорема. *$[a, b]$ кесиндисинде аныкталган $f(x)$ функциясы ушул аралыкта интегралдануучу болуш үчүн, бул функциянын чектелиши жана*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0{:}\forall T{:}l(T)<\delta_\varepsilon\to 0,\ 0\leqslant S_T-s_T<\varepsilon \tag{13}$$

аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

○ а) **Зарылдыгы.** $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсун. Анда ал чектелген жана интегралдын аныктамасы боюнча

$$\exists J{:}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0{:}l(T)<\delta_\varepsilon\ \forall\xi\to J-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma_T(\xi)<J+\frac{\varepsilon}{3}.$$

$[a, b]$ кесиндисинин ар бир бөлүштүрүүчүсү майдасынын $l(T)<\delta_\varepsilon$ болгондо

$$J-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma_T(\xi)<J+\frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

барабарсыздыгы каалагандай тандалмада ξ үчүн орун алат.

Ошондуктан (14) жана (9) шарттарынан

$$J-\frac{\varepsilon}{3}<\inf_{\xi}\sigma_T(\xi)=s_T \tag{15}$$

ушуга окшош эле (14) жана (8) шарттарынан

$$s_T=\sup\ \sigma_T(\xi)\leqslant J+\frac{\varepsilon}{3}, \tag{16}$$

ал эми (15) жана (16) барабарсыздыктарынан

$$J-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant s_T\leqslant S_T\leqslant J+\frac{\varepsilon}{3}$$

алабыз, мындан

$$0\leqslant S_T-s_T\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Демек, кесиндидеги интегралдануучу функция (13) шартын канааттандырат.

б) **Жетиштүүлүгү.** f функциясы $[a, b]$ кесиндисинде чектелген жана (13) шартын канааттандырсын. f функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болушун көрсөтөбүз, б.а.

$$\exists J{:}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0{:}\forall T{:}l(T)<\delta_\varepsilon\ \forall\xi\to\left|\sigma_T(\xi)-J\right|<\varepsilon. \tag{17}$$

5^0 касиетинен жана (12) барабарсыздыгынан $0\leqslant\bar{J}-\underline{J}\leqslant S_T-$ $-s_T<\varepsilon$ келип чыгат, мындан (13) негизинде $0\leqslant\bar{J}-\underline{J}\leqslant S_T-$

$-s_T < \varepsilon$ барабарсыздыгы каалагандай $l(T) < \delta_\varepsilon$ болуучу T бөлүштүрүүчү үчүн орун алат.

$\overline{J}$ жана $\underline{J}$ T дан көз каранды болбогондуктан

$$\overline{J} = \underline{J},\ J = \overline{J} = \underline{J} \tag{18}$$

аркылуу белгилеп, J саны $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисинде интегралы болорун көрсөтөбүз. (12) жана (18) ден $s_T \leqslant J \leqslant S_T$ ал эми (19), (6) жана (13) негизинде

$$|\sigma_T(\xi) - J| \leqslant S_T - s_T < \varepsilon \tag{19}$$

барабарсыздыгын алабыз. Бул болсо $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу жана J саны f тин $[a, b]$ да интегралы болот. ●

Н а т ы й ж а. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, ал эми J саны бул $[a, b]$ интервалда анын интегралы болсо, анда $J = \sup s_T = \inf s_T$.

1-э с к е р тү ү. Бөлүштүрүү $T = \{x_i,\ i = 0, 1, \dots, n\}$ нын $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ аралыгында $\omega_i(f) = \omega_i = M_i - m_i$ саны $f(x)$ функциясынын термелүүсү деп аталат, мында $M_i = \sup\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in \Delta_i} f(x)$. Анда $S_T - s_T = \sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i$.

Көбүнчө (13) интегралдоо шартын төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0,\ l(T) \to 0. \tag{20}$$

2-э с к е р т ү ү. Төмөнкү барабардык $\omega_i(f) = \sup\limits_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')|$ кеңири колдонулат. (21)

○ Накта жогорку чектин аныктамасы боюнча (21) төмөнкүчө болжолдойлу.

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M_i - m_i \text{ мында } \forall x',\ x'' \in \Delta_i; \tag{22}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0' \in \Delta_i,\ x_0'' \in \Delta_i : M_i - m_i - \varepsilon < f(x_0'') - f(x_0') \tag{23}$$

(21) формуласы $M_i = m_i$ да орун алат, анткени бул учурда $M_i > m_i$ болсун, анда $\forall x', x'' \in \Delta_i$ үчүн $m_i \leq f(x') \leq M_i$, $m_i \leq f(x'') \leq M_i$ барабарсыздыктары орун алышат, мындан (22) шарты орун алары келип чыгат. (23) шартын далилдөө үчүн каалагандай $\varepsilon > 0$ санын $\varepsilon < M_i - m_i$ шартын канааттандыргандай кылып алабыз. Накта жогорку чектин аныктамасынын негизинде $x_0' \in \Delta_i$, $x_0'' \in \Delta_i$ сандары табылып

$$f(x_0') < m_i + \frac{\varepsilon}{2} < M_i - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0'')$$

орун алат, мындан (25) шартынын орун алары келип чыгат. ●

3-эскертүү. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ $\tilde{T} = \tilde{T}(\varepsilon)$ бөлүштүрүүчүсү жашап жана $S_T - s_T < \varepsilon$ болсо, анда $\delta > 0$ саны табылып, майдалыгы $l(T) < \delta$ болгон $\forall T$ бөлүштүрүү үчүн $S_T - s_T < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат.

Ошондуктан интегралдануучулуктун негизинде чектелген $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндисинде Риман боюнча интегралдануучу болуш үчүн $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T$ $S_T - s_T < \varepsilon$ аткарылыш керек.

6. Интегралдануучу функциялардын класстары.

3-теорема. *Эгерде f функция $[a, b]$ кесиндиде үзгүлтүксүз функция болсо, анда ал ушул кесиндиде интегралдануучу болот.*

○ $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болсун. Анда ал Кантордун теоремасы боюнча бир калыпта үзгүлтүксүз функция.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta_\varepsilon > 0: \forall x',\ x'' \in [a,\ b]: |x' - x''| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (24)$$

$f(x)$ функциясы үчүн (13) шарты орун аларын далилдейбиз. $T = \{x_i,\ i = \overline{0,n}\}$ $[a, b]$кесиндисинин каалагандай

бөлүштүрүүчүсү болсун жана анын майдалыгы $l(T) = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i <$
$< \delta_\varepsilon$, мында $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Вейерштрасстын теоремасы боюнча $\xi', \xi'' \in \Delta_i$ жашап $f(\xi_i') = m_i$, $f(\xi_i'') = M_i$ болсун, мында

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x),\ M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x),\ i = \overline{1,n}.$$

Ошондуктан (24) шартынан

$$\omega_i = M_i - m_i = f(\xi_i'') - f(\xi_i') < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

анткени

$$\left|\xi_i'' - \xi_i'\right| \le l(T) < \delta.$$

Мындан

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Ошентип,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 : \forall T : l(T) < \delta_\varepsilon\ \to S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

2-теорема боюнча $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болот. ●

4-теорема. *Эгерде f функция $[a, b]$ кесиндиде аныктал са жана монотондуу болсо, анда ал интегралдануучу функ ция болот.*

○ $f(x)$ функциясы аныктык үчүн, өсүүчү функция бол сун анда

$$\forall x \in [a, b],\ f(a) \le f(x) \le f(b)$$

аткарылат, ошондуктан $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисин де чектелген. $[a, b]$ кесиндинин бөлүштүрүүчү каалаган дай $T = \{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$ карайлы. Анда $f(x_{i-1}) = m_i$, $f(x_i) = M_i$, мында

$$m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x),\ M_i = \sup_{x_n\in\Delta_i} f(x)$$

Ошондуктан

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i,$$

мындан

$$S_T - s_T \leqslant l(T)\sum_{i=1}^{n}(f_i - f_{i-1}) = l(T)(f_n - f_0).$$

$$(f_i - f_{i-1} > 0 \ \Delta x_i \leqslant max\ \Delta x_i \leqslant l(T)),$$

мындан $l(T) \to 0$ да $S_T - s_T \to 0$. Ошентип, 2-теорема боюнча $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу болот.

5-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндиде аныкталса жана ушул аралыктын чектелген сандагы c_κ, $\kappa = \overline{1,n}$ чекиттеринен башка бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз функция болсо, анда ал $[a, b]$ кесиндисинде интегралданууч болот.*

○ $\forall\varepsilon > 0$ берилсин $a < C_1 < \ldots < C_m < b$ болсун жана $\alpha = \min_i(C_\kappa - C_{\kappa-1})$ деп белгилейбиз, мында $C_\kappa \neq a$, $(\kappa = \overline{1,m})$, $C_{\kappa+1} = b$. Эгерде $\rho = \alpha/2$ болсо, анда $C_0 = a$ чекитинин ρ аймагы өз ара кесилишет жана $[a, b]$ кесиндисине таандык. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде чекителген функция болгондуктан M саны жашап бардык $x \in [a, b]$ үчүн $|f(x)| \leqslant M$ болот.

$$\lambda = min\left(\rho,\ \frac{\varepsilon}{24mn}\right),\ E = \bigcup_{\kappa=1}^{m} u_\lambda(c_\lambda),\ c_\kappa,$$

$(\kappa = \overline{1,m})$ чекитинин λE_1 аймагы $E = [a, b]/E_1$, $[a, b]$ кесиндинин E_1 таандык болбогон бардык чекиттери. Анда $[a, b] = E \cup E_1$ мында $E \cap E_1 = \varnothing$ E — туюк область болгондуктан $f(x)$ функциясы Кантордун теоремасы боюнча E де бир калыпта үзгүлтүксүз функция болот. Ошондуктан

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\bar\delta = \bar\delta_\varepsilon \geqslant 0.\ \forall x',\ x'' \in E\ |x' - x''| < \bar\delta_\varepsilon \Leftrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad (25)$$

$[a, b]$ кесиндинин майдасы $l(T) < \delta_\varepsilon$ каалагандай бөлүштүрүүчүсү $T = \{x_i,\ i = \overline{1,n}\}$, мында $\delta_\varepsilon = min(\delta_\varepsilon,\ \lambda)$.

Эгерде $l(T) < \delta$ болсо, анда $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. (26)

Байкасак

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{\Delta_i \in E}^{(1)} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\Delta_i \in E}^{(2)} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\Delta_i \in E}^{(3)} \omega_i \Delta x_i, \qquad (27)$$

мында (27) оң жагындагы биринчи жана экинчи сумма ирети менен E жана E_I көптүгүнө таандык болгон бардык T бөлүштүрүүчү боюнча, үчүнчү сумма бөлүштүрүүнүн чакан кесиндилери боюнча алынат. Биринчи сумма үчүн, (25) негизинде, (21) формуласын пайдаланып,

$$\omega_i = sup|f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ал эми экинчи жана үчүнчү суммалар үчүн $\omega_i < 2M$ барабарсыздыгы орун алат.

Биринчи жана экинчи суммаларда интервалдардын узундуктарынын суммалары ирети менен $b - a$ жана $m2\lambda$ кичине болушат. Үчүнчү суммада интегралдардын узундуктарынын суммалары $2m\lambda$ кичине болот, анткени үчүнчү сумма $2m$ деп аталган T бөлүштүрүүнүн интегралдарын кармашат.

Ошондуктан, (27) барабарсыздыгынан

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon(b-a)/2(b-a) + 2m\lambda 2m + 2m2m\lambda,$$

мында $8mM\lambda \leqslant 8mM\varepsilon/24mM = \varepsilon/3$.

Ошентип $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,

б.а. (26) барабарсыздыгы орун алат. ◉

§ 2. АНЫК ИНТЕГРАЛДЫН КАСИЕТТЕРИ

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болсо, анда бул интеграл, интегралдын алдында функциянын аргументин кайсы тамга менен белгилегенден көз каранды болбойт.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

Кээде $\int_a^b f(x)dx$ ордуна $\int_\Delta f(y)dy$ деп жазса да болот, анткени $\Delta = [a, b]$.

1. Функциялардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар менен байланышкан касиеттер.

1^0. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функциялар болсо, анда каалагандай α жана $\beta \in \mathbb{R}$ сандары үчүн $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функция болот жана

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad (1)$$

барабардыгы орун алат.

○ Берилген $[a, b]$ аралыгын бөлүштүрүүдө жана ξ чекиттерин тандаганда φ, f жана g функцияларынын интегралдык суммаларын ирети менен $\sigma_T(\xi;\ \varphi)$, $\sigma_T(\xi;\ f)$, $\sigma_T(\xi;\ g)$ белгилесек, анда төмөнкү барабардык орун алат.

$$\sigma_T(\xi;\ \varphi) = \alpha\sigma_T(\xi;\ f) + \beta\sigma_T(\xi;\ g).$$

Эми T бөлүштүрүүчүлүгүнүн майдасы нөлгө умтулсун ($l(T) \to 0$), анда f жана g интегралдануучу функциялар болгондуктан барабардыктын оң жагы $[a, b]$ аралыгында пределге ээ болот, ошондуктан сол жагы да пределге ээ болот жана (1) барабардыгы орун алат. ●

2^0. Эгерде $f(x)$ жана $g(x)$ $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу функциялар болушса, анда бул аралыкта $\varphi = f \cdot g$ функциясы дагы интегралданууччу функция болот.

○ $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларынын интегралданууччулугунан $[a,\ b]$ аралыгында бул функциялардын чектелгендиги келип чыгат.

$$\exists c > 0 : \forall x \in [a,\ b] \to |f(x)| \leq c,\ |g(x)| \leq c. \tag{2}$$

Ошондуктан $\varphi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында чектелген. Эми $x',\ x''$ чекиттери $[a,\ b]$ аралыгынын каалагандай чекиттери болсун, анда

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = (f(x'') - f(x'))g(x'') + f(x')(g(x'') - g(x'))$$

барабардыгынан жана (2) шартынан

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq c(|f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|), \tag{3}$$

барабарсыздыгы келип чыгат.

Эгерде $T = \{x_i,\ i = \overline{0,n}\}$ $[a,\ b]$ аралыгынын бөлүштүрүүсү

$$\Delta_i = [x_{i-1},\ x_i],\ x',\ x'' \in \Delta_i, \omega_i f(x) \text{ жана } \omega_i(g),$$

f жана g функцияларынын Δ_i аралыгындагы термелүүлөрү болсо, анда

$$\omega_i(f) = \sup_{\Delta_i} |f(x') - f(x'')|, \omega_i(g) = \sup_{\Delta_i} |g(x') - g(x'')|,$$

ошондуктан (3) барабарсыздыктан

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq c(\omega_i(f) + \omega_i(g))$$

орун алат жана мындан $\omega_i(\varphi) \leq c(\omega_i(f) + \omega_i(g)),\ i = \overline{1,n}$. (4)

Алынган (4) барабарсыздыгын Δx_i көбөйтүп жана алынган барабарсыздыктарды суммаласак, анда

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i(\varphi)\Delta x_i \leq c\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i\right) \tag{5}$$

Эми $l(T)\to 0$, бул барабарсыздыктардын оң жагы нөлгө умтулгандыктан анын сол жагы да нөлгө умтулат. Ошондуктан φ функциясынын $[a, b]$ да интегралдануучулугу келип чыгат. ●

2. Интегралдоо аралыгы менен байланышкан касиеттер.

1°. Эгерде $f(x)$ $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсо жана $a<c<b$, анда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (6)$$

барабардыгы орун алат.

○ Бул (6) формуласын далилдеш үчүн $\sigma_T(f, \xi)=\sigma'_T(f, \xi)+ +\sigma''_T(f, \xi)$ барабардыгын пайдаланабыз, мында σ' жана σ'' f функциясынын $[a, c]$ жана $[c, b]$ аралыктарынын T бөлүшүүсү үчүн интегралдык суммалары, c бөлүштүрүүнүн чекити. $l(T)\to 0$ интегралдардын жашашынан интегралдык суммалардын чектелген пределге ээ болушу келип чыгат.●

Кийинки касиеттерди $a=b$ жана $a>b$ үчүн анын интегралдык түшүнүгүн кеңейтебиз.

Эгерде $f(x)$ функциясы a чекитинде аныкталса, анда

$$\int_a^a f(x)dx=0 \qquad (7)$$

болот.

Эгер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсо, анда аныктама боюнча

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx,\ a<b, \qquad (8)$$

чынында, (7) ни көрсөтүш үчүн $a=b$ десек бөлүштүрүүнүн аралыктары нөлгө барабар, ошондуктан каалагандай интегралдык сумма $\sigma_T(f) = 0$. Эми $a > b$ болсо $\int_b^a f(x)dx$ символуна туура келүүчү интегралдык сумма $\int_a^b f(x)dx$ интегралына туура келүүчү суммадан белгиси менен айырмаланат. Демек, (8) орун алат.

2^0. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу болуп жана c_1, c_2, c_3 бул аралыктын каалаган чекиттери болсо, анда
$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx \qquad (9)$$
$c_1 < c_2 < c_3$ болсо, 1^0 касиет боюнча (9) барабардык орун алат. Эгерде $c_1 < c_3 < c_2$ болсун деп карасак (калган учурлары ушуга окшош), анда 1^0 касиеттин негизинде $\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x)dx + \int_{c_3}^{c_2} f(x)dx$, мындан (9) барабардыгын алабыз, эгерде (8) формула боюнча $\int_{c_3}^{c_2} f(x)dx = -\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx$ барабардыгын эске алсак.
Ал эми $c_1 = c_3$ болсо, анда (9) формуласы (7), (8) дин жардамы менен корсотүлөт.

3. Интегралдарды чамалоо.

1^0. Бардык $x \in [a, b]$ үчүн $f(x) \geq 0$ анда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ да интегралдануучу болот жана
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \qquad (10)$$

○ $[a, b]$ аралыгынын каалагандай T бөлүштүрүүчүсү жана каалагандай тандалма $\xi = \{\xi_i,\ i = 0,1,\ \ldots,\ n\}$ үчүн

$$\sigma_T(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

барабарсыздыгы орун алат. Мындан $l(T) \to 0$ пределге өтүп (10) формуласын алабыз. ●

Натыйжа. *Эгерде* $f(x)$, $g(x)$ *функциялары* $[a, b]$ *аралыгында интегралдануучу функциялар болсо жана* $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ *барабарсыздыгы орун алса, анда*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

2°. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу болсо жана m, M сандары жашаса, $\forall x \in [a, b]$ үчүн $m \leq f(x) \leq M$ барабарсыздыгы аткарылса, анда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

3°. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсо, жана $x_0 \in [a, b]$ чекити

$$(\forall x \in [a, b], \ f(x) \geq 0$$

табылып $f(x) \geq 0$ болуп $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

○ x_0 чекит $[a, b]$ аралыгынын ички чекити болсун,

$$x_0 \in (a, b)$$

үзгүлтүксүз функциянын белгисин сакталуу касиети боюнча

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \subset [a, b] \to f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0). \qquad (13)$$

Биз $\Delta_1 = [a, x_0 - \delta]$, $\Delta_2 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\Delta_3 = [x_0 + \delta, b]$ аркылуу белгилейли.

$\int\limits_{\Delta_i} f(x)dx \geq 0,\ i = 1,\ 2$ үчүн жана (11) шарты боюнча,

ал эми

$$\int\limits_{\Delta_0} f(x)dx \geq \int\limits_{\Delta_0} \frac{1}{2} f(x_0)dx = f(x_0)\delta > 0,$$

анда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\Delta_1} f(x)dx + \int\limits_{\Delta_0} f(x)dx + \int\limits_{\Delta_2} f(x)dx \geq f(x_0)\delta > 0.$$ ●

Ушуга окшош эле $x_0 = a,\ x_0 = b$ учурун кароого болот.

4°. Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралында интегралдануучу функция болсо, анда $|f(x)|$ функциясы ушул аралыкта интегралдануучу болот жана

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \qquad (14)$$

барабарсыздыгы орун алат.

○ $|f(x)| = g(x)$ деп белгилейли. Көрүнүп тургандай

$$\forall x',\ x'' \in [a,\ b] \to |g(x') - g(x'')| \leq |f(x') - f(x'')| \qquad (15)$$

$T = \{x_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n\}$ аралыгынын каалагандай бөлүштүрүүсү жана $\omega_i(f),\ \omega_i(g)$ f жана g функцияларынын $\Delta_i = [x_{i-1},\ x_i]$ аралыгында термелүүлөрү. Анда (15) барабарсыздыгынан

$$\sup_{\Delta_i} |g(x') - g(x'')| \leq \sup_{\Delta_i} |f(x') - f(x'')|,$$

же болбосо $\omega_i(g) \leq \omega_i(f),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ алынат, мындан

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i \qquad (16)$$

алабыз. Шарт боюнча $f(x)$ интегралдануучу функция болгондуктан (16) нын оң жагы $l(T) \to 0$ да нөлгө умтулат, ошондуктан сол жагы нөлгө умтулат, мындан $g(x)$ функциясынын $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучусу келип чыгат. ●

4. Орточо маани жөнүндө интегралдык теорема.

Теорема. *$f(x)$, $g(x)$ функциялары төмөнкү шарттарды канааттандырышсын:*

1) *$f(x)$ жана $g(x)$ $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функциялар болсо;*

2) $\exists m, M: \forall x \in [a, b] \Rightarrow m \le f(x) \le M;$ **(17)**

3) *$g(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында белгисин өзгөртпөсө; (же $g(x) \ge 0$ $x \in [a, b]$ же $g(x) \le 0$ $x \in [a, b]$).* **(18)**

Анда
$$\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \qquad (19)$$

○ Аныктык үчүн (18) дин биринчи шарты аткарылсын, анда (17) ден
$$\forall x \in [a, b] \to mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \qquad (20)$$
келип чыгат.

$f(x)$, $g(x)$ функциялары $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу функциялар болгондуктан $f(x)\,g(x)$ дагы $[a, b]$ да интегралдануучу функция болот жана
$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b Mg(x)dx. \qquad (21)$$

Эгерде $\int_a^b g(x)dx = 0$, анда (21) ден $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, ошондуктан бул учурда (19) барабарсыздыгы $\forall\mu$ үчүн орун алат.

Эми $\int_a^b g(x)dx \ne 0$ анда $\int_a^b g(x)dx > 0$ (18) боюнча. Ошондуктан (21) төмөнкүгө тең күчтүү: $m < \mu < M$, **(22)**

мында
$$\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int_a^b g(x)dx. \qquad (23)$$

Ошентип, (23) төн (19) келип чыгат. Бул теорема $g(x) \le 0$

үчүн дагы орун алат, анткени $g(x)$ ти $-g(x)$ ке алмаштырганда (19) барабардыгы сакталат. ●

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз, ал эми $g(x)$ интегралдануучу функция жана $g(x)$ белгисин өзгөртпөсө, анда

$$\exists c\in[a,\ b]:\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx. \qquad (24)$$

Жеке учурда, эгер $g(x)=1$ десек, анда

$$\exists c\in[a,\ b]:\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a) \qquad (25)$$

$m=\inf\limits_{\Delta} f(x),\ M=\sup\limits_{\Delta} f(x)$ болсун. Вейерштрасстын теоремасы боюнча

$$\exists x_1,\ x_2\in[a,\ b],\ f(x_1)=m,\ f(x_2)=M$$

жана (17) барабарсыздыгы орун алат. Эгерде μ (23) барабардыгы менен аныкталган сан болсо, анда $f(x_1)<\mu<f(x_2)$ орун алат. Үзгүлтүксүз функциянын аралыктагы мааниси жөнүндө теорема боюнча $\exists c\in[a,\ b]: f(c)=\mu$ (II гл., 3-п., 3° кара) ошондуктан (19) ду (24) түрдө жазабыз.

§ 3. ЖОГОРКУ ПРЕДЕЛИ ӨЗГӨРҮЛМӨ ИНТЕГРАЛ

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсо, анда $\forall x\in[a,\ b]$ үчүн

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx \qquad (1)$$

интегралы жашайт жана аны жогорку предели өзгөрүлмө интеграл деп аташат. Ушул (1) интегралдын касиеттерине токтололу:

а) Интегралдын үзгүлтүксүздүгү.

1-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу функция болсо, анда $F(x)$ бул аралыкта үзгүлтүксүз функция болот.*

○ $x \in [a,\ b]$, $x + \Delta x \in [a,\ b]$ болушсун. Мында $\Delta x \to 0$ учурда $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) \to 0$ көрсөтөбүз. Ал үчүн (1) формуланы пайдалансак

$$\Delta F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \tag{2}$$

жана $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу болгондуктан, ал ушул аралыкта чектелген болот.

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a,\ b] \to |f(x)| \le M. \tag{3}$$

3^0 касиет боюнча

$$|\Delta F(x)| \le \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)dt| \right| \le M|\Delta x|,$$

мындан $\Delta x \to 0$, $\Delta F(x) \to 0$ чыгат б.а. $F(x)$ функциясы x чекитинде үзгүлтүксүз функция. Ал эми $\forall x \in [a,\ b]$ болгондуктан $F(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болот. ●

б) Интегралдын дифференцияланууучулугу.

2-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында интегралдануучу жана $x_0 \in [a,\ b]$ чекитинде үзгүлтүксүз функция болсо, анда $F(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцияланууучу функция болот жана*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{4}$$

○ Бул (4) көрсөтүү $\Delta x \neq 0$ жана $x_0 + \Delta x \in [a,\ b]$ болсун, $x = x_0$ чекитинде (2) барабардыгы орун алат. $\Delta x \to 0$ болгондо

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \to 0 \tag{5}$$

болорун далилдейбиз. Ал үчүн $\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \Delta x$ барабардыгын пайдаланып, σ өзгөртүп түзөлү,

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{f(x_0)}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt,$$

мындан

$$|\sigma| = \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt\right| . \qquad (6)$$

Шарт боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болгондуктан каалагандай $\varepsilon > 0$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, баардык $t \in U_\delta(x_0)$ үчүн $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ (7)
орун алат.

Мында $U_\delta(x_0) = \{t: |t - x_0| < \delta\}$ $|\Delta x| < \delta$ болсун, анда $|t - x_0| \leq$ $\leq |\Delta x| < \delta$, анткени $t \in \delta$ мында l учтары x_0, $x_0 + \Delta x$ болгон кесинди. Ошондуктан $|\Delta x| < \delta$ болгондо (7) барабарсыздыгы аткарылат. Анда (6) формуладан

$$|\sigma| < \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta x| = \varepsilon.$$

Ошентип, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $|\Delta x| < \delta$ болгондо $0 < |\Delta x| < \delta$ $\left|\frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x)\right| < \varepsilon$ орун алат, б.а. (6) шарты орун алат. ●

в) Үзгүлтүксүз функциянын баштапкы функциясынын жашашы.

3-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болсо, анда ушул аралыкта $f(x)$ баштапкы функцияга ээ болот жана баштапкы функция* $\int_a^x f(x)dt = F(x)$. Ошондуктан

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \qquad (8)$$

мында C – каалагандай турактуу чоңдук.

$\forall x \in [a,\ b]$ 2-теорема боюнча $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,$ x чекитинде $f(x)$ ке барабар болгон туундуга ээ болот,

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=f(x).$$

Натыйжа. 3-теоремадан $f(x)$ каалаган баштапкы функциясы $\Phi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция жана

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C \tag{9}$$

түрүндө болот.

§ 4. АНЫК ИНТЕГРАЛДАРДЫ ЭСЕПТӨӨ

а) Ньютон-Лейбництин формуласы.

4-теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болуп жана $\Phi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында $f(x)$ функциясынын каалагандай баштапкы функциясы болсо, анда Ньютон-Лейбництин формуласы орун алат:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{10}$$

○ 3-теореманын натыйжасы боюнча c саны жашап (9) барабардыгы орун алат. Анда (9) формуласына $x=a$ десек $c=\Phi(a)$ ээ болобуз. Ошондуктан (9) барабардыгын төмөнкүчө жазабыз.

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+\Phi(a), \tag{11}$$

(11) барабардыгы $\forall x \in [a,\ b]$ үчүн аткарылат, жеке $x=b$ учурда $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)dt+\Phi(a).$ ●

Мисалы.

$$\int_0^{\pi/2}(x^{10}-10^x-x^3+\sin 2x)dx=\left(\frac{x^{11}}{11}-\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{11}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+1.$$

б) Өзгөрмөлүүнү алмаштыруу.

5-теорема. *$f(x)$ функциясы (a, b) интервалында үзгүлтүксүз функция болсун, ал эми $\varphi(t)$ функциясы (α, β) аралыгында үзгүлтүксүз туундуга ээ болсун жана $\varphi(t)\in(a, b)$. Эгерде $\alpha\in(\alpha, \beta)$, $\beta\in(\alpha, \beta)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, анда төмөнкү формула орун алат.*

$$\int_a^x f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \varphi'(t)dt. \tag{12}$$

○ $a\in(\alpha, \beta)$, $b\in(\alpha, \beta)$ жана $f(\alpha, \beta)$ аралыгында үзгүлтүксүз болгондуктан Ньютон-Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a), \tag{13}$$

мында $\Phi'(x)=f(x)\ \forall x\in(a, b)$,

$$\frac{d}{dt}(\Phi(\varphi(t)))=\Phi'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Демек, $\Phi(\varphi(t))$ функциясы $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ функциясынын баштапкы функциясы болот.

$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ функциясына $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ болорун эске алып, Ньютон-Лейбництин формуласын пайдаланабыз, анда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(\varphi(\beta)-\Phi(\varphi(\alpha)=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{14}$$

(13) жана (14) формуласынан (12) формуласы чыгат. ●

25*

Мисалы $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ интегралын эсептегиле.

△ Бул интегралды өзгөрмөлүүнү алмаштыруу жолу менен чыгаралы $\sqrt{x}=t$ десек, анда

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx=\int\limits_0^1 \frac{2t^2}{t+1}dt=2\int\limits_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}-t+ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1=ln4-1. \blacktriangle$$

в) Бөлүктөп интегралдоо.

6-теорема. *Эгерде $u(x)$ жана $v(x)$ функциялары $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз туундуларга ээ болушса, анда бөлүктөп интегралдоонун формуласы орун алат:*

$$\int\limits_a^b uv'dx=uv\Big|_b^a-\int\limits_a^b vu'dx. \tag{15}$$

○ Формуланы көрсөтүү максатында $uv'=(uv)'-u'v$ бирдейликти $[a, b]$ аралыгында интегралдап

$$\int\limits_a^b uv'dx=\int\limits_a^b (uv)'dx-\int\limits_a^b vu'dx, \tag{16}$$

Ньютон-Лейбництин формуласын барабардыктын оң жакчы биринчи интегралга колдонуп,

$$\int\limits_a^b (uv)'dx=(uv)\Big|_a^b=(v(b)u(b)-v(a)u(a))$$

ээ болобуз.

Ошондуктан (16) барабардыгын (15) түрдө жазабыз. ●

Мисалы. $\int\limits_0^{\pi/4} arctgxdx=\left|\begin{matrix}u=arctgx, & du=\frac{1}{1+x^2}dx\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=xarctgx\Big|_0^{\pi/4}-$

$$-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln(1+x^2)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right).$$

§ 5. АНЫК ИНТЕГРАЛДЫН КОЛДОНУЛУШУ

1. Тегиздиктеги фигуранын аянтын табуу.

а) тегиздиктеги фигура жана анын аянты.

Каалагандай чектелген тегиздиктеги чекиттердин көптүгү *жалпак фигура* деп аталат. Эгерде жалпак фигураны бири-бири менен кесилишпеген төрт бурчтуктардын биригүүсү катарында карасак, анда аны *клеткалуу фигура* деп атайбыз. Ал эми $K=\{(x,\ y): a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq y \leq b_2\}$ түрүндөгү чекиттердин көптүгүн төрт бурчтук деп түшүнөбүз же K дан чекитерин алып салгандагы чекиттердин жыйындысын карайбыз. Бул учурда K төрт бурчтугунун аянты деп $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$ санын билебиз, мында K нын чегинин чекиттери K га таандык же таандык эмес болушу мүмкүн.

Эгерде каалагандай $\varepsilon>0$ үчүн клеткалуу фигуралар q жана Q аныкталып

$$q \subset G \subset Q, \tag{1}$$

$$0 \leq S(Q)-S(q)<\varepsilon \quad \text{аткарылса,} \tag{2}$$

анда G жалпак фигурасы квадратталуучу фигура деп аталат, мында $S(Q)$, $S(q)$ ирети менен Q жана q фигураларынын аянттары. Эми G — жалпак фигурасы квадратталуучу фигура болсун, анда бул фигуранын аянты деп $S(G)$ төмөнкү барабарсыздыкты канааттандыруучу

$$S(q) \leq S(G) \leq S(Q) \tag{3}$$

$S(G)$ санын айтабыз, мында клеткалуу фигуралар q, Q (1) барабарсыздыкты канааттандырат.

1-теорема. *Каалагандай квадратталуучу G фигурасы үчүн $S(G)$ саны жашайт жана жалгыз, бирок*

$$S(G)=\sup S(q)=\inf S(Q). \tag{2}$$

○ Каалагандай (1) шартын канааттандыруучу клеткалуу q, Q фигуралар үчүн $S(q) \leq S(Q)$ орун алат, анда болуп алма теоремасы боюнча $supS(q)$ жана $infS(Q)$ аныкталат жана

$$S(q)\leqslant supS(q)\leqslant infS(Q)\leqslant S(Q), \tag{3}$$

мындан

$$S(q)\leqslant supS(q)\leqslant S(Q). \tag{4}$$

Ошентип $S(G)=supS(q)$ саны (2) шартын канааттандырат. $S(G)$ санынын жалгыздыгын далилдейлик. $S(G)$ санынан башка $S'(G)$ саны жашап (2) шартын канааттандырсын:

$$S(q)\leqslant S'(G)\leqslant S(Q). \tag{5}$$

Анда (2) жана (5) ден

$$\left|S(G)-S'(G)\right|\leqslant S(Q)-S(q), \tag{6}$$

мында $q\subset G\subset Q$.

G квадратталуучу фигура болгондуктан (2) шарты орун алгандай Q, q фигураларын тандайбыз. Ошондуктан (6) дан $S'(G)=S(G)$ чыгат.

Ошентип G квадратталуучу фигура $S(G)$ аянтына ээ. (3) шартынын негизинде (2) барабардыгы чындык. ●

б) ийри сызыктуу трапециянын аянты.

G фигурасы $o\,x\,y$ тегиздигинде

$$G=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\} \tag{6a}$$

шарты боюнча берилсин, мында $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция.

G ийри сызыктуу трапеция квадратталуучу фигура жана анын аянты

$$S=S(G),\ S=\int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

формуласы аркылуу туюнтулат.

Мисалы $y^2=ax$ жана $x^2=ay$ $(a>0)$ ийри сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

$$\triangle\ P=\int_0^a\left(\sqrt{ax^2}-\frac{x^2}{a}\right)dx=\left(\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^c=\frac{2a}{3}-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{3}.\ \blacktriangle$$

○ $T=\{x_i,\ i=\overline{0,n}\}$ $[a,\ b]$ аралыгынын бөлүштүрүүчүсү болсун, M_i, m_i, $f(x)$ функциясынын $\Delta_i=[x_{i-1},\ x_i]$ аралыгындагы ирети менен эң чоң жана кичине маанилери болсун. Эми $q_i(i=\overline{1,n})$ төрт бурчтуктардан турган клеткалуу фигурасын карайлык, мында i төрт бурчтуктун негизи Δx_i, бийиктиги m_i.

Ушуга окшош эле, негизги Δx_i, бийиктиги $M_i(i=\overline{1,n})$ Q төрт бурчтуктардан турган клеткалуу фигураны карасак q, Q болору бышык. $S(q)$, $S(Q)$ алардын аянттары

$$S(q)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\ S(Q)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Мындан $S(q)=s_T$, $S(Q)=S_T$ болорун байкайбыз, (8)
мында s_T жана S_T ирети менен $[a,\ b]$ аралыгынын T бөлүштүрүүсү үчүн $f(x)$ функциясына түзүлгөн Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммалары.

$f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция, ошондуктан ал $[a,\ b]$ интегралдануучу функция болот, жана интегралдануучулуктун эрежеси боюнча $\forall\varepsilon>0$, T бөлүштүрүүсү табылган да: $0\leqslant S_T-S_T<\varepsilon$.

Башкача айтканда, q, Q клеткалуу фигуралар жашап, алар

$$q\subset G\subset Q,\ 0\leqslant S(Q)-S(q)<\varepsilon.$$

Ошентип (1) — (2) шарттары орун алышты. Бул болсо G квадратталуучу фигура экендигин билдирет. 1-теорема боюнча (2) орун алат жана (8) негизинде төмөнкүчө жазабыз:

$$S(G)=supS_T=infS_T=\int_a^b f(x)dx.\ \bullet \tag{9}$$

Эми $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз

$$y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ x\in[a,\ b],\ f_1(x)\leqslant f_2(x)$$

функциялар менен чектелген D фигурасын карайлык. Эгерде $f_1(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[a,\ b]$ болсо, анда D фигурасынын аянты ийри сызыктуу трапециялардын D_1 жана D_2 айырмасына барабар, мында

$$D_i=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f_i(x)\},\ i=1,2.$$

Ошондуктан D фигурасынын аянты S_D:

$$S_D=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx. \tag{10}$$

Калган учурларын да ушуга окшош эле карайбыз.

в) Ийри сызыктуу сектордун аянты.

Ийри сызык Γ теңдемеси уюлдук система координатта берилсин $\rho=\rho(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, мында $\rho(\theta)\geqslant 0$ жана $[\alpha,\ \beta]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция. Уюлдук ок менен α жана β бурчун түзүүчү шоолалар жана Γ ийри сызык менен курчалган фигураны *ийри сызыктуу сектор* деп айтабыз.

2-теорема. *Ийри сызыктуу фигура G квадратталуучу фигура жана анын аянты төмөнкү формула менен туюнтулат:*

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{11}$$

○ Далилдөө максатында $T=\{\varphi_i,\ i=\overline{0,n}\}$ $[a,\ b]$ аралыгынын бөлүштүрүүчүсү жана m_i, M_i ирети менен $\rho(\varphi)$ функциясынын $\Delta_i=[\varphi_{i-1},\ \varphi_i]$ аралыгында эң кичине жана чоң маанилери болушсун. Радиустары m_i, M_i болгон жаа жана $\varphi=\varphi_{i-1}$, $\varphi=\varphi_i$ шоолалары менен курчалган тегерек секторлорду q_i, Q_i деп белгилейли. Эгерде q фигурасы $q_1,\ \ldots,\ q_n$ фигураларынын, ал эми Q фигурасы $Q_1,\ \ldots,\ Q_n$ фигураларынын биригүүсү болсо, анда $q\subset G\subset Q$. Фигуралар q_i, Q_i квадратталуучу болгондуктан, q, Q дагы квадратталуучу фигуралар болушат жана алардын аянттары

$$S(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i, \; S(Q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Мындагы $S(q)$, $S(Q)$ суммалар $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ функциясынын $[\alpha, \beta]$ аралыгындагы Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммаларына дал келишет. Ошентип,

$$supS(q) = infS(Q) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \;\bullet$$

Мисалы $(x^2+y^2)^2 = \frac{a^4}{r^2}(x^2-y^2)^2$, $(a>0)$ туюк ийри сызык менен курчалган фигуранын аянтын аныктагыла. (11) формуланы пайдаланабыз. Бул максатта уюлдук координатка $x = r cos\varphi$, $y = r sin\varphi$ өтсок, анда $r^4 = a^4 cos^2 2\varphi \cdot r^2$, $r^2 = a^2 cos2\varphi$.

Демек,

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 cos2\varphi d\varphi = 2a^2\cdot\frac{1}{2}sin2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

2. Көлөмдү эсептөө.

а) Нерселер жана алардын көлөмдөрү.

Мейкиндиктеги каалагандай чектелген чекиттердин көптүгү *нерсе* деп аталат. Нерселерге таандык болгон аныктамалар жана көнүгүүлөр жалпак фигуралардын аныктамасына жана көнүгүүлөрүнө окшош. Ошондуктан кээ бир окшош аныктамаларды жана көнүгүүлөрдү калтырабыз.

Клеткалуу жалпак фигуралар түшүнүгүнө окшош эле, эгерде нерсени кесилишпеген параллелепипеддин биригүүсүнөн турат деп элестетсек, анда клеткалуу нерсени алабыз, б.а. төмөнкү түрдөгү нерсени:

$$M = \{(x, y, z): a_1 \leq x \leq b_1, \; a_2 \leq y \leq b_2, \; a_3 \leq z \leq b_3\}$$

ошондой эле M ден кээ бир чегин (же бүт чектерин) алып таштасак деле биз клеткалуу нерсени алабыз.

Бул M параллелепипединин көлөмү деп $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\times$ $\times(b_3 - a_3)$ санын билебиз. Алардын түзүүчү параллелепипеддин көлөмдөрүнүн суммасын клеткалуу нерсенин көлөмү деп аталат.

Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ үчүн клеткалуу p жана P нерселер табылып,

$$p \subset \Omega \subset P,\ 0 \leqslant V(P) - V(p) < \varepsilon$$

шарттары орун алышса Ω нерсе кубталуучу деп аталат, мында $V(P)$, $V(p)$ ирети менен P жана p нерселеринин көлөмү. Жогорудагы сыяктуу эле, эгерде Ω кубатталуучу болсо, анда $V(\Omega)$ саны табылып,

$$V(p) \leqslant V(\Omega) \leqslant V(P)$$

барабарсыздыгы каалагандай клеткалуу p, P нерселер үчүн аткарылат, мында $p \subset \Omega \subset P$ жана

$$V(\Omega) = supV(p) = infV(P).$$

Ушул $V(\Omega)$ санын V нерсенин көлөмү дейбиз.

б) Айлануудан пайда болгон көлөм.

4-теорема. *$f(x)$, $x = a$, $x = b$ сызыктары менен курчаган G ийри сызыктуу трапециянын ox огунун айланасында айлануусунан чыккан нерсенин көлөмү V төмөнкү формула боюнча эсептелет:*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{12}$$

○ Мында $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция, ал эми Q, q, T, m_i, M_i, Δx_i жогоруда каралган чоңдуктар жана ox огунун айланасында q, G, Q айланганда айлануудан чыккан p, Ω, P нерселер пайда болушат,

$$p \subset \Omega \subset P,$$

мында клеткалуу нерселердин p жана P көлөмдөрү ирети менен

$$V(p) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta x_i,\ V(P) = \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta x_i.$$

Демек $V(p)$, $V(P)$ ирети менен $\pi f^2(x)$ функциясынын $[a, b]$ кесиндисинин T бөлүштүрүүчү үчүн Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммалары болот.
Ошондуктан

$$V = supV(p) = infV(P) = \pi\int_a^b f^2(x)dx \bullet$$

Мисалы, $x = 1$, $y = 0$ жана $y = xe^x$ сызыктары менен чектелген фигуранын ox огунун айланасында айлануудан пайда болгон көлөмдү тапкыла.

$$\triangle \qquad V = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx = \pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x dx\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}xe^{2x}\Big|_0^1\right)\right) = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1). \blacktriangle$$

в) Берилген кесилиш аянты боюнча нерсенин көлөмүн аныктоо.

Ω нерсе ox огуна перпендикуляр болгон $x = a$, $x = b$ окторунда кесилишкен тегиздиктер менен курчалсын жана ал фигураны G_x деп белгилейли.

$\forall x \in [a, b]$ G_x фигурасын квадратталуучу жана анын аянтын $\sigma(x)$ $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болсун деп алабыз. Мындан сырткары G_α жана G_β, мында α, β $[a, b]$ каалагандай чекиттери ox огуна перпендикулярдуу тегиздикке проекциялаганда бири бирин кармабаган фигуралар пайда болушсун.

5-теорема. *Жогорку шарттар орун алганда Ω нерсенин көлөмү*

$$V = \int_a^b \sigma(x)dx \tag{13}$$

формула боюнча эсептелинет.

○ $T=\{x_i,\ i=\overline{1,n}\}$, $[a,\ b]$ кесиндисинин бөлүштүрүүчүсү m_i жана M_i ирети менен $\sigma(x)$ функциясынын $\Delta_i=[x_{i-1},\ x_i]$ аралыгында кичине жана чоң мааниси болсун $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$, $\sigma(x)$ үзгүлтүксүз функция болгондуктан $\xi_i\in\Delta_i$, $\xi_i'\in\Delta_i$ чекиттери табылып $\sigma(\xi_i)=m_i$, $\sigma(\xi_i')=M_i$, $i=\overline{1,n}$. Ω аркылуу A_{i-1} жана A_i ox огуна перпендикуляр жана x_{i-1}, x_i чекиттери аркылуу өткөн Ω бөлүгүн белгилейбиз.

Бийиктиги Δx_i болгон G_{ξ_i} жана $G_{\xi_i'}$ кесилиш аркылуу түзүлгөн цилиндрлик нерселерди D_i, D_i' болушса анда алардын көлөмдөрү

$$V(D_i')=m_i\Delta x_i,\ V(D_i')=M_i\Delta x_i.$$

Эгерде p $D_1,\ ...,\ D_n$ нерселеринин P $D_1',\ ...,\ D_n'$ нерселеринин биригүүсү болсо, анда $p\subset\Omega\subset P$,

$$V(p)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,\ V(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

Ал эми $\sup V(p)=\inf V(P)=\int_a^b\sigma(x)dx$ болгондуктан Ω көлөмү (13) формуласы аркылуу туюнтулат. ●

Мисалы, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1$ көлөмдү эсептеш үчүн $o\ y\ z$ координаттык тегиздикке жарыш тегиздик менен кессек, аянты $p(x)=6\pi\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$ $-4<x<4$ болгон $\frac{y^2}{4(1-x^2/16)}+\frac{z^2}{9(1-x^2/16)}=1$ эллипс менен чектелген фигураны алабыз. Ошондуктан, бул нерсенин көлөмү

$$V=2\pi\int_0^4 6\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx=12\pi\left(x-\frac{x^3}{48}\right)\Bigg|_0^4=32\pi.$$

3. Жаанын узундугун эсептөө.

Эгерде Γ ийри сызык

$$\Gamma = \{r = r(t),\ \alpha \leq t \leq \beta\} \tag{14}$$

теңдемеси менен берилсе жана үзгүлтүксүз дифференциялануучу функция болсо, анда анын узундугун төмөнкү (15) формула боюнча белгилеп алабыз:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)| dt. \tag{15}$$

○ Үзгүлтүксүз дифференцияланучу Γ ийри сызыгы түзөтүлүүчү болуп, өзгөрмөлүү жаанын узундугу $S(t)$,

$$S'(t) = |r'(t)| \tag{16}$$

формуласы аркылуу туюнтулат.

Ийри сызык Γ нын узундугу S болсо, анда (16) барабардыгын жана Ньютон-Лейбництин формуласын пайдалансак

$$\int_{\alpha}^{\beta} |r'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} S'(t) dt = S(\beta) - S(\alpha) = S,$$

анткени $S(\beta) = S,\ S(\alpha) = 0$.

Эгерде $r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ болсо, анда (15) тен

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt \tag{17}$$

алабыз.

Эгерде Γ тегиз ийри сызык $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ теңдемеси менен берилсе анда анын узундугу

$$S = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{18}$$

формуласы аркылуу туюнтулат. ●

Мисалы, x чоңдугу $(\sqrt{3},\ \sqrt{8})$ аралыгында өзгөргөндө $y = \ln x$ ийри сызыктын узундугун тапкыла.

$$\triangle \qquad L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx.$$

$\sqrt{x^2+1}=t,\ x=\sqrt{t^2-1},\ dx=t/\sqrt{t^2-1}dt$ болгондуктан

$$L=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int_2^3\left(1+\frac{0,5}{t-1}-\frac{0,5}{t+1}\right)dt=$$

$$=\left(t+0,5ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right)\Bigg|_2^3=1+ln2$$

келип чыгат. ▲

4. Айлануудагы беттин аянтын эсептөө.

Берилген $f(x)$ терс эмес жана $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция $T=\{x_i,\ \overline{1,n}\}$, $[a,\ b]$ аралыгынын бөлүштүрүүчүсү, L_T чокулары $A_i(x_i,\ f_i)$ $i=\overline{1,n}$ жана $A_1,\ \dots,\ A_n$ чекиттерин туташтыруучу сынык сызык l_i, $D_i=[A_{i-1},\ A_i]$ кесиндисинин узундугу болсун. Анда

$$l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f_i-f_{i-1})^2}. \tag{19}$$

ox огунун айланасында D_i звеносу айланганда кесилген конустун каптал бетин пайда кылат. Бул беттин аянты

$$P_i=\pi(y_{i-1}+y_i)l_i,\ y_\kappa=f(x_\kappa),\ \kappa=\overline{1,n},$$

мындан ox огунун айланасында L_T ийри сызык айланганда пайда болгон бетинин аянты P_T,

$$P_T=\pi\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)\cdot l_i. \tag{20}$$

Эгерде предел

$$limP_T=P \tag{21}$$

жашаса, жана $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында үзгүлтүксүз болсо, анда айлануудагы беттин аянты P төмөнкү формула боюнча туюнтулат.

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (22)$$

○ (19) жана (20) формулаларынын

$$P_T = \pi \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \cdot (y_i + y_{i-1}). \qquad (23)$$

Лагранждын теоремасы боюнча

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (24)$$

мында $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1},\ x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ошондуктан (20) формуласын төмөнкүчө жазабыз:

$$P_T = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1})\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i. \qquad (25)$$

(25) туюнтмасына, (22) интегралы үчүн,

$$\sigma_T(\xi,\ g) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i \qquad (26)$$

интегралдык сумманы кошуп жана кемитебиз, мында

$$g(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Эми $g(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнөн жана каалагандай ξ үчүн

$$\lim_{l \to 0} \sigma(\xi,\ g) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

жашайт.

Ошондуктан (22) формуласын далилдеш үчүн $l(T) \to 0$ да

$$\omega = P_T - \sigma_T(\xi,\ g) \to 0, \qquad (27)$$

далилдөө жетиштүү.

(25), (26) формулаларынан

$$\omega = \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i-1} - 2f(\xi_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i \qquad (28)$$

келип чыгат. $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ аралыгында бир калыпта үзгүлтүксүздүгүнөн пайдаланабыз, б.а. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$, $\forall x', x'' \in [a, b]$ $|x' - x''| < \delta$ шартын канааттандырганда

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/c \tag{29}$$

орун алат, мында $c > 0$ санын төмөнкүчө тандайбыз: $l(T) = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i < \delta_\varepsilon$ шартты канааттандырсын, анда $|x_i - \xi_i| \le \le l(T) < \delta_\varepsilon$, $|x_{i-1} - \xi_i| \le l(T) < \delta_\varepsilon$, анткени $\xi_i \in \Delta_i (i = 1, \ldots, n)$ же

$$|y_i - f(\xi_i)| = |f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon/c, \quad |y_{i-1} - f(\xi_i)| < \varepsilon/c$$

чыгат, ошондуктан

$$|y_i + y_{i+1} - 2f(\xi_i)| < 2\varepsilon/c. \tag{30}$$

$f'(x)$ функциясынын $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүздүгүнөн $M > 0$ саны жашап, $\forall x \in [a, b]$ үчүн $0 \le \sqrt{1 + (f'(x))^2} \le M$ барабарсыздыгы аткарылат.

Жеке учурда

$$0 \le \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \le M, \; i = \overline{1, n}. \tag{31}$$

Эми (28), (30) жана (31) формулалардан

$$|\omega| < \pi \sum_{i=1}^{n} \frac{2\varepsilon}{c} M \Delta x_i = 2\pi M (b - a)\varepsilon/c \tag{32}$$

табабыз. Эми $c = 2\pi(b - a)M$ десек, анда $|\omega| < \varepsilon$. Мындан $l(T) \to 0$, $\omega \to 0$ келип чыгат. ●

Мисалы, $[0, 6]$ аралыгында $y^2 = 8x$ сызыгынын ox огунун айланасында айланганда пайда болгон беттин аянтын тапкыла.

△ $$V = 2\pi \int_0^6 \sqrt{8x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\, dx = 2\sqrt{8}\pi \int_0^6 \sqrt{x + 2}\, dx =$$

$$= \frac{4\sqrt{8}\pi}{3} \sqrt{(x + 2)^3}\Big|_0^6 = \frac{224\pi}{3}. \; ▲$$

5. Анык интегралдын физикалык маселелерди чыгарууда колдонулушу.

Ар кандай физикалык маселелерди чечүүдө анык интеграл кеңири колдонулат. Атап айтканда ылдамдыгы белгилүү болгон материалдык чекиттин басып өткөн жолун, өзгөрмөлүү күчтүн жумушун, жалпак фигурадагы суюктуктун басымын, тегиздикте ийри сызыктын жана фигуранын массасын, статикалык моменттерин жана оордук борборунун координаттарынын ж.б.

а) ийри сызыктын статикалык моменттерин жана оордук борборун эсептөө.

Тегиздикте тик бурчтуу координат система алынып жана $A(x, y)$ чекитинде m масса топтолсун. Анда A чекитинин ox жана oy окторуна карата статикалык моменттери деп ирети менен массанын ал чеиттин ординатасы жана абсциссына болгон көбөйтүндүсүн айтабыз

$$M_x = my,\ M_y = mx,$$

Эгерде $A_i(x_i,\ y_i)$ чекиттердин системасы берилсе жана аларда $m_i,\ i=\overline{1,n}$ массалары топтолсо, анда ox, oy окторуна карата статикалык моменттери деп ирети менен

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\ M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (33)$$

чоңдуктарын айтабыз.

Бул чекиттердин системасынын массаларынын оордук борбору деп бардык масса $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ топтолгон $c(x_0,\ y_0)$ чекитин айтабыз. C чекитин каалаган окко карата статикалык моменти системанын ошол эле окко карата статикалык моментине барабар. Ошондуктан,

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = my_0,\ M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = mx_0 \qquad (34)$$

Материалдык чекиттин системасынын массаларынын оордук борборунун координаталарын

$$x_0 = \frac{M_x}{m} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i, \; y_0 = \frac{M_y}{m} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (35)$$

формуласы аркылуу эсептейбиз.

Бир тектүү материалдык ийри сызык

$$y = f(x), \; a \leq x \leq b$$

теңдемеси менен берилсин, мында $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз дифференциялануучу функция. Эгерде тыгыздыгы $\rho = 1$ болгон Γ ийри сызыктын массасы m ийри сызыктын узундугуна s сан маанисине барабар болот деп эсептейли. Эми $T_i = \{x_i, \; i = \overline{1,n}\}$, $[a, b]$ кесиндисин бөлүштүрүүчүсү $l(T)$ бул бөлүштүрүүнүн майдалыгы. Анда T бөлүштүрүүчүсүнө Γ ийри сызыгынын майда $\Gamma_i (i = \overline{1,n})$ бөлүкчөлөрү туура келет, мында Γ_i $y = f(x)$ $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ теңдемеси менен берилген ийри сызык. Γ_i ийри сызыгынын узун дугу

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

боюнча эсептелет. Эгерде T бөлүштүрүүчү майда болсо, анда

$$S_i \approx \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \Delta x_i, \; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Эми $l(T) \to 0$ анда $S_i \to 0$, ошондуктан бул майда бөлүштүрүүчүдө T Γ_i сызыгынын материалдык чекити $A_i(x_i, f_i)$ деп эсептөөгө болот. Демек Γ_i ийринин ox, oy окторуна карата статикалык моменттерин M_i', M_i'' болжол менен A_i чекитинин ox, oy окторуна карата статикалык моменттерине барабар деп эсептөөгө болот.

$$M_i' \approx f(x_i) S_i \approx f(x_i) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \Delta x_i,$$

$$M_i'' \approx x_i S_i \approx x_i \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \Delta x_i$$

Ал эми Γ ийри сызыгынын ox, oy окторуна карата статикалык моменттери ирети менен

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x_i, \qquad (36)$$

$$\sigma_2(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\Delta x_i,$$

формулалары менен аныкталат.

Бул (36) нын пределин Γ ийри сызыгынын ирети менен ox, oy окторуна карата статикалык моменттери деп атайбыз.

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \qquad (37)$$

ал эми массасы

$$m = S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \qquad (38)$$

$C(x_0, y_0)$ чекитинин оордук борборунун координаттары:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

Мисалы. $y = \sqrt{9-x^2}$ жарым айлананын оордук борборун $C(\xi, \eta)$ эсептегиле.

$\triangle$ Алынган фигуралар боюнча $\xi = \frac{1}{3\pi}\int_{-3}^{3} x\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(9-x^2) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{9-x^2}\,\Big|_{-3}^{3} = 0.$$

$$\eta = \frac{1}{3\pi}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-3}^{2} dx = \frac{6}{\pi}$$

$C\left(0, \frac{6}{\pi}\right)$ чекити оордук борбор болот. $\blacktriangle$

26*

б) фигуранын статикалык моменттерин жана оордук борборун эсептөө.

Жогорудагы (§ 5. 6а) шарты менен аныкталган G жалпак фигура берилсин, мында $f(x)$ үзгүлтүксүз функция, ушул фигурада тыгыздыгы $\rho = 1$ болгон масса жайланышсын жана $T = \{x_i, \ i = \overline{1,n}\}$, $[a, b]$ кесиндисин бөлүштүрүүчүсүн карайбыз жана да ар бир $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ чекит аркылуу oy огуна жарыш түз сызык аркылуу G фигурасын $G_i (i = \overline{1,n})$ бөлөбүз.

$$G_i = \{(x, y): x_{i-1} \leq x \leq x_i, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Эгерде G_i фигурасынын ирети менен аянты S_i жана массасы m_i болсо, анда $m_i = S_i$ жана T жетиштүү түрдө майда бөлүштүрсөк, анда $m_i = S_i \approx f(x_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ жана G_i фигурасынын массасынын координаттары

$$x_0^{(i)} \approx x_i, \ y_0^{(i)} \approx \frac{1}{2} f(x_i),$$

ал эми (43) боюнча G_i фигурасынын ox, oy окторуна карата статикалык моменттери

$$M_i' \approx \frac{1}{2}(f(x_i))^2 \Delta x_i, \ M_i'' \approx x_i f(x_i) \Delta x_i$$

аркылуу аныкташат.

Суммалар

$$\sigma'(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i', \ \sigma''(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i'', \qquad (*)$$

ирети менен G фигурасынын ox, oy окторуна карата статикалык моменттеринин болжолдуу маанилерин беришет. Эгерде $l(T) \to 0$, анда (*) пределдери төмөнкү

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \ M_y = \int_a^b x f(x) dy \qquad (39)$$

интегралдарды берет да ал формулалар аркылуу G фигурасынын ox, oy окторуна карата статикалык моменттерин эсептейбиз. G фигурасынын массасы $(\rho=1)$ анын аянтына барабар болгондуктан

$$m=s=\int_a^b f(x)dx \tag{40}$$

фигуранын оордук борборунун координаты үчүн төмөнкү формулаларды алабыз:

$$x_0=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},\quad y_0=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}. \tag{41}$$

Мисалы ox огу жана $y=\sqrt{4-x^2}$ жарым айлана менен курчалган фигуранын оордук борборун $C(\xi,\ \eta)$ тапкыла.

△ $$\xi=\frac{1}{p}\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{4\pi}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-x^2)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)\Big|_{-2}^{2}=0,$$

$$\eta=\frac{2}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\frac{1}{4\pi}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{4\pi}\left(8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{8\pi}.$$

Демек $C\left(0,\ \frac{8}{3\pi}\right)$ оордук борбор. ▲

КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Анык интегралды эсептегиле:

а) $\int_0^2 |1-x|dx;$ в) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x+2};$

б) $\int_0^{\sqrt[n]{a/2}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$ г) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\ \sin 2x\,dx.$

2. Бөлүктөп интегралдоонун жардамы менен төмөнкү интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$;   в) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$;

б) $\int_1^2 x \ln x dx$;   г) $\int_0^{\ln 2} x^2 e^{-x} dx$.

3. Өзгөрмөнү алмаштырып төмөнкү интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$;   в) $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx$;

б) $\int_0^{\pi} \sin^6 x dx$;   г) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\cos x+3} dx$.

4. Ийри сызыктар менен курчалган төмөнкү фигуранын аянттарын тапкыла:

а) $y=x^2,\ y^2=x$;   в) $y=\ln x \quad x\in[a,\ b]$;

б) $y^2=x^2-x^4$;   г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

5. Төмөнкү ийри сызыктардын узундугун тапкыла:

а) $y=\ln \cos x,\ 0\leqslant x\leqslant a<\pi/2$;

б) $\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t)\\ y&=a(1-\cos t)\end{aligned}\right\}\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

в) $y=\ln(1-x^2),\ 0\leqslant x\leqslant 0{,}5$;

г) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

6. Каралган беттер менен курчалган төмөнкү нерселердин көлөмдөрүн тапкыла:

а) $x+y+z=1,\ x=y=z=0$;   б) $z=x^2+2y^2,\ x^2+2y^2+z^2=6$;

в) $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$; г) $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$, $z = 3$.

7. p фигурасы ox огуна карата айланганда келип чыккан нерсенин көлөмүн тапкыла:

а) $y = x^2$, $y^2 = x$; в) $y = chx$, $a \leqslant x \leqslant b$;

б) $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$; г) $y = arcsinx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8. $f(x)$ графиги ox огуна карата айланганда келип чыккан беттин аянтын тапкыла:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $y = ach\frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

б) $y = sinx$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; г) $y = tgx$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

9. а) $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$, $x = 0$, $y = 0$ сызыктары менен курчалган фигуранын ox, oy окторуна карата статикалык моменттерин тапкыла.

б) $y = ach\frac{x}{a}$, $-a < x < a$ сызыгын ox, oy окторуна карата статикалык моменттерин эсептегиле.

10. а) $x = acos^3t$, $y = asin^3t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ сызыгынын оордук борборун тапкыла.

б) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ ийри сызыктары менен курчалган фигуранын оордук борборун тапкыла.

ПАЙДАЛАНЫЛГАН АДАБИЯТТАР

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. I, II. - М.: Высшая школа, 1981.

2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I, II. - М.: Наука, 1983.

3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. - М.: Наука, 1979.

5. *Зорич В.А.* Математический анализ. ч. Т. I, II. - М.: Наука, 1981, 1984.

6. *Усубакунов Р.* Математикалык анализ. I-II бөлүк. Фрунзе: Мектеп, 1981.

7. *Рудин У.* Основы математического анализа. - М.: Мир, 1966.

8. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Госиздат, 1964.

9. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1964.

10. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость). - М.: Наука, 1984.

11. *Кудрявцев Л.Д. Китисов А.Д., Чехлов В.И. Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу (интегралы, ряды). - М.: Наука, 1986.

МАЗМУНУ

I ГЛАВА

Анык сандар

§ 1. Рационалдык жана иррационалдык сандар 5
1. Рационалдык сандар 5
2. Иррационалдык сандар 6
§ 2. Чексиз ондук болчокко ажыроочу сандарды рационалдык сандар менен жакындаштыруу 8
1. Чыныгы сандарды салыштыруу 8
2. Чыныгы сандардын геометриялык сүрөттөлүшү 8
3. Чексиз ондук болчок менен түгөнтүлгөн рационалдык сан менен жакындаштыруу 10
§ 3. Сандык көптүктүн чектери 11
§ 4. Чыныгы сандар менен болгон амалдар 14
1. Чыныгы сандарды кошуу жана кемитүү 14
2. Чыныгы сандарды көбөйтүү жана бөлүү 16
§ 5. Көптүктөр жөнүндөгү негизги түшүнүктөр 18
1. Көптүктөр менен болгон амалдар 18
2. Саналуучу жана саналбоочу көптүктөр 19
§ 6. Чыныгы сандардын негизги касиеттери 20

II ГЛАВА

Удаалаштыктын предели

§ 1. Сан удаалаштыгы жана анын предели 23
1. Сандык удаалаштыктар 23
2. Пределдин аныктамалары 25
3. Удаалаштыктын пределинин жалгыздыгы 29
§ 2. Чексиз кичине жана чексиз чоң удаалаштыктар жана алардын колдонулуштары 38
1. Чексиз кичине удаалаштыктар 38
2. Жыйналуучу удаалаштыктар менен болгон амалдар 43
§ 3. Удаалаштыктардын пределинин жашашы 46
1. Удаалаштыктын монотондуулугу, көптүктүн анык учтары 46
2. Монотондуу удаалаштыктын жыйналуусунун белгиси 48
3. e — саны 50
4. Улам камтылган аралыктар жөнүндөгү Кантордун теоремасы 52
§ 4. Камтылган удаалаштыктар жана алардын пределдери 53
1. Камтылган удаалаштыктар 53
2. Камтылган удаалаштыктардын пределдери 55
·. Удаалаштыктардын жыйналуусу жөнүндөгү Кошинин шарты 58
·нүгүүлөр 60

III ГЛАВА

Функциянын предели жана анын үзгүлтүксүздүгү

§ 1. Сандык функция 63
1. Функция 63
2. Функциянын графиги 67
3. Так жана жуп функциялар 69
4. Чектелген жана чектелбеген функциялар 71
5. Монотондуу функциялар 73
6. Мезгилдүү функциялар 74
7. Тескери функция 76
§ 2. Функциянын предели жөнүндөгү аныктамалар 78
1. Пределдердин түрлөрү 83
2. Көптүктүн пределдик чекиттери 85
3. Функциялардын пределдеринин касиеттери 86
4. Монотондуу функциялардын пределдери 92
5. Функциянын пределинин бар болушу жөнүндө Кошинин чемдүүлүгү 94
§ 3. Үзгүлтүксүз функциялар 97
1. Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү 97
2. Үзгүлтүктүү чекиттер 102
3. Үзгүлтүксүз функциялардын локалдык касиеттери 105
4. Үзгүлтүксүз функциялардын кесиндидеги касиеттери 106
5. Үзгүлтүксүз функциянын тескери функциясынын бар болушу жана анын үзгүлтүксүздүгү 111
§ 4. Элементардык функциялардын үзгүлтүксүздүгү 114
1. Көп мүчөлөр жана рационалдык функциялар 114
2. Көрсөткүчтүү жана логарифмдик функциялар 115
3. Даражалуу функция x^r ________ 120
4. Тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялар . 122
5. Гиперболалык функциялар жана алардын тескери функциялары .. 124
§ 5. Биринчи универсалдык предел 126
§ 6. Экинчи универсалдык предел 127
§ 7. Функциялардын эквиваленттүүлүгү 131
Функцияларды салыштыруу 131

IV ГЛАВА

Туунду жана анын колдонулушу

§ 1. Туунду жана дифференциал 135
1. Туундунун түшүнүгүнө келтирилүүчү маселелер 135
2. Туундунун аныктамасы 137
3. Туундунун геометриялык мааниси 141
4. Бир жактуу жана чексиз туундулар 143
§ 2. Туунду алуунун эрежелери 147
1. Сумманы, көбөйтүндүнү, бөлчөктү жана тескери функцияларды дифференцирлөө 147
2. Татаал функцияны дифференцирлөө 152
3. Параметрдик жана айкын эмес түрдө берилген функцияларды дифференцирлөө 160
§ 3. Функциянын дифференциалы 162
1. Функцияны жакындаштырып эсептөө үчүн колдонуу 164

2. Дифференциалдоонун эрежелери жана негизги формулалары 165
3. Дифференциалдын геометриялык мааниси 166
§ 4. Жогорку тартиптеги туундулар жана дифференциалдар 167
1. Жогорку тартиптеги туунду 167
2. Лейбництин формуласы 170
3. Жогорку тартиптеги дифференциалдар 171
4. Параметрдик түрдө берилген татаал жана тескери функциялардын жогорку тартиптеги туундулары 172
§ 5. Дифференцирленүүчү функциялар үчүн негизги теоремалар жана алардын колдонулушу 174
§ 6. Лопиталдын эрежеси 181
§ 7. Тейлордун формуласы 187
1. Тейлордун формуласынын калдыгы 189
§ 8. Функцияларды изилдөөдө алардын туундуларынын пайдаланылышы 195
1. Өсүүчү жана кемүүчү функциялар 195
2. Функциянын экстремумдары 198
3. Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилери 201
4. Функциянын графигинин ийментиги 203
5. Алмашуу чекити 206
6. Асимптоталар 210
7. Функциялардын графиктерин түзүү 211

V ГЛАВА

Көп аргументтүү жана айкын эмес функциялар

§ 1. Көп өлчөмдүү мейкиндиктер 216
1. Вектордук n өлчөмдүү мейкиндиги 217
2. Скалярдык көбөйтүндү 217
3. Коши-Буняковскийдин барабарсыздыгы 229
4. Нормалдуу мейкиндик 229
5. Метрикалуу мейкиндик 221
§ 2. Көп өлчөмдүү мейкиндиктеги көптүктөр жана удаалаштыктар ... 222
1. Көптүктөр жөнүндөгү негизги түшүнүктөр 222
2. Удаалаштыктар жана анын жыйналуусу 225
§ 3. Көп аргументтүү функциянын предели жана үзгүлтүксүздүгү 229
1. Көп аргументтүү функциянын аныктамасы 231
2. Көп аргументтүү функциянын предели (чеги) 231
3. Көп аргументтүү функциянын үзгүлтүксүздүгү 233
§ 4. Үзгүлтүксүз функциялардын негизги касиеттери 236
§ 5. Көп аргументтүү функциянын туундулары жана дифференциалы 240
1. Жекече туундулар 240
2. Көп аргументтүү функциянын дифференцирленүүсү 241
3. Көп аргументтүү татаал функциянын дифференциалы 246
4. Дифференциалдын геометриялык мааниси 250
5. Багыт боюнча туунду. Градиент 252
§ 6. Жогорку тартиптеги жекече туундулар жана дифференциал 254
1. Жогорку тартиптеги жекече туундулар 254
2. Жогорку тартиптеги дифференциалдар 258
3. Көп аргументтүү функция үчүн Тейлордун формуласы 263
§ 7. Көп аргументтүү функциянын экстремуму 266

1. Көп аргументтүү функциянын экстремумунун түшүнүгү жана анын зарыл шарты 266
2. Көп аргументтүү функциянын ылайыктуу экстремумунун жетиштүү шарты 268
§ 8. Айкын эмес функциялар 275
1. Бир теңдеме менен аныкталган айкын эмес функциялар 275
2. Теңдемелердин системасы менен аныкталган айкын эмес функциялар 281
3. Функциялардын туюндурууучулугу (көз карандылыгы) 284
4. Шарттуу экстремум 287
Көнүгүүлөр 291

VI ГЛАВА

Анык эмес интегралдар

§ 1. Анык эмес интегралдын аныктамасы жана касиеттери. Интегралдоонун негизги ыкмалары 293
1. Баштапкы функция 293
2. Анык эмес интегралдын аныктамасы 295
3. Анык эмес интегралдын касиеттери 296
4. Өзгөрүлмө чоңдукту алмаштыруу (алмаштыруу методу) 298
5. Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы 303
§ 2. Рационалдык функцияларды жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу 306
1. Көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу 306
2. Дурус рационалдык бөлчөктөрдү ажыратуу жөнүндө теорема 311
3. Коэффициенттерди аныктоо ыкмалары (практикалык) 316
§ 3. Рационалдык, иррационалдык, тригонометриялык жана гиперболалык функцияларды интегралдоо 321
1. Рационалдык функцияларды интегралдоо 321
2. Остроградскийдин ыкмасы 329
3. Иррационалдык функцияларды интегралдоо 332
4. Биномдук дифференциалды интегралдоо 342
5. Тригонометриялык функцияларды интегралдоо 345
6. Тригонометриялык функциялар үчүн рекуренттик формулалар 352
7. $R(e^x)$ жана $R\left(\sqrt[n]{e^{ax}+b}\right)$ функцияларын интегралдоо 357
8. Гиперболалык функциялардын интегралданышы 358
9. Элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаган интегралдар 359
Көнүгүүлөр 361

VII ГЛАВА

Анык интеграл

§ 1. Анык интегралдын аныктамасы жана жашоо шарттары 363
1. Анык интеграл түшүнүгүнө алып келүүчү маселелер 363
2. Анык интеграл түшүнүгү 365
3. Функциянын интегралдануучулугунун зарыл шарты 366
4. Дарбунун суммалары жана анын касиеттери 367
5. Функциянын интегралдануучулугу 369
6. Интегралдануучу функциялардын класстары 371
§ 2. Анык интегралдын касиеттери 376

1. Функциялардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар менен байланышкан касиеттер 376
2. Интегралдоо аралыгы менен байланышкан касиеттер 378
3. Интегралдарды чамалоо 379
4. Орточо маани жөнүндө интегралдык теорема 382
§ 3. Жогорку предели өзгөрүлмө интеграл 383
§ 4. Анык интегралдарды эсептөө 386
§ 5. Анык интегралдын колдонулушу 389
1. Тегиздиктеги фигуранын аянтын табуу 389
2. Көлөмдү эсептөө 393
3. Жаанын узундугун эсептөө 397
4. Айлануудагы беттин аянтын эсептөө 398
5. Анык интегралдын физикалык маселелерди чыгарууда колдонулушу 401
Көнүгүүлөр 405

Окуу китеби

Алтай Бөрүбаев, Керим Бараталиев, Бектурган Шабыкеев, Токтогазы Аманкулов, Токой Камытов

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ

I- бөлүм

Учебник

Алтай Бөрүбаев, Керим Бараталиев, Бектурган Шабыкеев, Токтогазы Аманкулов, Токой Камытов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I-часть

Терүүгө 18.XII.96ж. берилди. Басууга 04.01.99 кол коюлду. Офсеттик кагаз. Форматы 84х108/32. Көлөмү 13,0 физикалык басма табак. Нускасы 1000 экз.

ЖИ «Луиза», Бишкек ш. Эркиндик бульвары 56